「はじめての微分方程式」シリーズ 第２回　微分方程式を作る

第1回では、微分方程式とはどのようなものかの概略を述べたが、今回は具体的な微分方程式を作る過程を説明する。微分方程式は具体的な事象を数式化するために使われる。

ここで、円錐形の容器に水を入れてゆくとき、水面の高さがどのように変化してゆくかを数式で示してみよう。

［微分方程式を作る］　上面の半径が R [m]、高さが h [m] としよう。これに水を毎秒 a [m³] 注ぎこむとする。 t [s] のときの水面の高さを y [m] としたとき、 $y=f(t)$ となる関数を求めるにはどのようにすればよいのだろうか。最初に、微分方程式を作ること。次に、その微分方程式を解くこと。以上の2つに尽きる。

時刻が t [s] から $t+\Delta t$ [s] の間に注ぎ込まれる水の量は $a\Delta t$ [s] になる。

水面の高さが y [m] のとき、水面の半径は $\dfrac{Ry}{h}$ [m] だから、 水面の広さは $\pi\left(\dfrac{Ry}{h}\right)^2$ になる。

水面の上昇量を Δy とすると、水の増加量は $\pi\left(\dfrac{Ry}{h}\right)^2\cdot\Delta y$ である。注入量と増加量は等しいから、

$a\Delta t=\pi\left(\dfrac{Ry}{h}\right)^2\cdot\Delta y$ の関係式が成立する。両辺を Δt で割ると $a=\pi\left(\dfrac{Ry}{h}\right)^2\cdot\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ になる。

Δt を無限に小さく(極限値)したとき、微分方程式 $a=\pi\left(\dfrac{Ry}{h}\right)^2\cdot\dfrac{dy}{dt}$ …① が得られる。

［微分方程式を解く］　微分方程式 ① を解くにはどうすればよいか？前回のように単純に積分する方法は使えない。ここで、微分方程式の解法のテクニックが登場する。次に紹介する解法のテクニックは常用されるもので、**「微分方程式の解法」** すなわち **「変数分離法」** と呼ばれるくらい重要なテクニックである。

「変数分離法とは」 微分方程式から変数は t と y であることは誰にでも分かる(a 、 R 、 h 、 π は定数)。したがって、変数分離とは t と y をそれぞれ右辺と左辺に分離することを表している。

具体的に実行した結果を示すと、 $a\,dt=\pi\left(\dfrac{Ry}{h}\right)^2dy$ のように変形することである。

変数分離された関係式の両辺を積分できれば、この微分方程式が解ける。

$$\int a\,dt=\int\frac{\pi R^2y^2}{h^2}\,dy$$

$$at+C=\frac{\pi R^2y^3}{3h^2}$$

なお、積分定数を確定するには初期条件を使う。初期条件とは、時刻ゼロのときの状態のことで、この場合は水面の高さ y がゼロ ということをいう。この初期条件を使って積分定数を求めると、ゼロであることが分かる。よって、水面の高さの関数は次のようになることが分かる。

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{3ah^2}{\pi R^2}\right)t}$$

以上のように、具体的な現象をとらえて、それらを数量化して解析することは色々な分野で使われている。文系の分野でも経済学が微積分、微分方程式を多用しており、経済学部の学生が苦しむ原因にもなっているようだ。理系の分野ではどの分野でも、微分方程式は常識的な道具として扱われている。水をためる容器の応用例はダムに水がたまる過程を計算する場合などに利用されている(実際は流れ込む水量も変化し、流れ出す水量も変化する複雑なもの)。