

「はじめての微分方程式」シリーズ 第3回 微分方程式の解法 「直接積分法」

科学新興社「モノグラフ」という参考書をご存知だろうか？ 数学を項目別に取り上げ、全26巻からなる「数学の大参考書群(1冊ずつは小さいコミック版サイズ)」で随分昔から有名だった。手元にある「モノグラフ」を見てみると初版が1969年6月10日とあり、35年ほど前からあるようだ。この参考書にも当然「微分方程式」が取り上げられ、第20巻がそれである(昔の高校生は教科書に載っており、文系・理系ともに全員必修だった分野)。数学の全分野が網羅されているので、数学に興味がある人は一度書店で見えてみてはどうでしょうか(図書館にもあるかもしれない)。

今回はこの「モノグラフ」に載っている微分方程式の内容を取り上げてみよう。

冒頭に「未知関数の導関数を含む等式を微分方程式という」と書かれており、「微分方程式が n 次の導関数を含み、それより高い次数の導関数を含まないとき、これを n 階微分方程式という」とも書かれている。数学らしく専門用語を使って威厳をもった文体で高級感が溢れるが、「導関数」とは微分した結果の関数のこと、「 n 次」の導関数とは、 n 回微分した結果の関数のことと読みかえればたいしたことは無い。恐れるに足らずという心構えで取り組みばよい。

モノグラフには、微分方程式の解き方について5つの方法が取り上げられている。

- ① 直接積分形
- ② 変数分離形
- ③ 置換により変数分離形に導けるもの
- ④ 線形1階微分方程式
- ⑤ 線形2階微分方程式

微分方程式は以上の5つの形に分類され、それぞれの形に応じた解法が示されている。最初の①は第1回で扱った微分方程式の形で、そのまま積分するだけで解ける微分方程式である。次の②は第2回で扱った微分方程式の形で、変数を右辺と左辺に移動し、その両辺を積分することで微分方程式の解を得る。③以降は、より複雑な微分方程式の形に相当し、特に、⑤の線形2階微分方程式は物理学を始めとする色々な分野で頻繁に使われる形の微分方程式である。これらの微分方程式の解法を、分類された順に例題を元に詳しく説明していくことにする。

【直接積分法】 直接積分形の代表的なものには1次導関数(微分係数)が微分変数だけの関数で表せるものであり、 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ の形になるものをいう。両辺を積分するだけで解けてしまう、一番簡単な微分方程式であるがゆえに実用性は薄い微分方程式でもある。

練習問題 (積分の練習として解いてみよう) 解答は次回に発表です。

1. $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ 初期条件は、 $x=0$ のとき、 $y=10$ とする。(初期条件変更!)
2. $\frac{dy}{dx} = 3 - x^2$ 初期条件は、 $x=0$ のとき、 $y=0$ とする。
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$ 初期条件は、 $x=10$ のとき、 $y=1$ とする。
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+3}$ 初期条件は、 $x=0$ のとき、 $y=0$ とする。