「はじめての微分方程式」シリーズ 第４回　　微分方程式の解法②「変数分離法」

第3回では、最も単純な「直接積分法」を説明した（練習問題の解答は次のページにあります）。今回は微分方程式の解法として少し高級な「変数分離法」を説明してみよう。第2回での説明の一部に変数分離法を使った微分方程式を紹介しているが、今回は練習問題もつけて説明する。なお、練習問題の解答は次回（第5回）に付録として記載します。

［変数分離法］　微分方程式の変数がどれかを判断するのは決して難しいことではない。導関数を表す $\frac{dy}{dx}$ の部分を見ればすぐに分かる。導関数の d の後ろの変数 x 、 y が変数になる。それさえ分かれば、変数分離は簡単だ。変数が分かれば、変数を右辺、左辺に分離すればよい（通常の式の変形と同じだ）。

［例題］

前回の講座 第3回の練習問題（直接積分法）を変数分離法で解いてみよう。

問題1では $\frac{dy}{dx}=2x+3$ の分母 dx を右辺に移動させると $dy=(2x+3)dx$ となるので、変数は両辺に分離できた（変数 x が右辺に、変数 y が左辺に集まった）。この両辺を積分すればよいのだ。左辺は $\int dy=\int 1\,dy=y+C$ であり、右辺は $\int 2x+3\,dx=x^2+3x+C$ である。よって、積分定数は1つで十分だから、 $y=x^2+3x+C$ になる。初期条件 $x=0$ 、 $y=0$ を代入して積分定数を定めると $C=0$ になる。よって、この微分方程式の解は $y=x^2+3x$ である。直接積分法と実質同じといえるが、少し途中経過が異なるだけだ。どちらを使うかは自由で、制約はまったく無い。好きな方法を使えばよい。

練習問題 この解答は次回講座（第5回）にて発表します。

1. $\frac{dy}{dx}=xy$ 　初期条件は $x=0$ のとき、 $y=10$ とする。

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3}{y+2}$ 　初期条件は $x=0$ のとき、 $y=0$ とする。

3. $\frac{dy}{dx}=(2x+3)y$ 　初期条件は $x=0$ のとき、 $y=10$ とする。

4. $\frac{dy}{dx}=\log x^y$ 　初期条件は $x=1$ のとき、 $y=1$ とする。

前回の練習問題の解答　この解答は第3回講座（直接積分形の解法）のものです。

1.　$\dfrac{dy}{dx}=2x+3$　初期条件は、 $x=0$ のとき、 $y=0$ とする。

［解法］ 両辺を積分して $y=x^2+3x+C$ になる。初期条件を代入して $C=0$ であるから、微分方程式の解は $y=x^2+3x$ である。

2.　$\dfrac{dy}{dx}=3-x^2$　初期条件は、 $x=0$ のとき、 $y=0$ とする。

［解法］ 両辺を積分して、 $y=3x-\dfrac{1}{3}x^3+C$ である。初期条件を代入して $C=0$ であるから、微分方程式の解は $y=3x-\dfrac{1}{3}x^3$ である。

3.　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{x}$　初期条件は、 $x=10$ のとき、 $y=1$ とする。

［解法］ 両辺を積分して $y=2\log|x|+C$ より、 $C=1-2\log 10$ だから、 $y=2\log|x|+1-2\log 10$ だから、微分方程式の解は $y=\log\dfrac{ex^2}{100}$ である。

4.　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+3}$　初期条件は、 $x=0$ のとき、 $y=0$ とする。

［解法］ 両辺を積分して、 $y=\log|x+3|+C$ になる。初期条件を代入して $C=-\log 3$ になる。よって、微分方程式の解は $y=\log\left|\dfrac{x+3}{3}\right|$ である。

［積分公式］

① $\int x^n\,dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$　（但し $n=-1$ ）

② $\int \dfrac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$ （対数の底は e ）

③ $\int e^x\,dx=e^x+C$ （対数の底は e ）

④ $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

⑤ $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

⑥ $\int \tan x\,dx=-\log|\cos x|+C$

⑦ $\int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$

⑧ $\int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx=f(g(x))+C$

⑨ $\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$
$=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

⑩ $\int x^n\,dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$