「はじめての微分方程式」シリーズ 第５回　微分方程式の解法のテクニック③

第 4 回までで、基本的な微分方程式の解法を紹介してきた。微分方程式の解法として「変数分離法」が扱えるようになれば、いろいろな物理現象を微分方程式を使って表現し、それを解き明かすことができるようになる。第 5 回目の講義として、物理に立ち返ってみたい。

1 年生の時に学習した物理の最初は「力と運動」すなわち「力学」という分野であった。

［速度と加速度］

速度とはどのようなものだった？　$t=t_0$ から $t=t_0+\Delta t$ の間で位置が $x=x_0$ から $x=xt_0+\Delta x$ に移動したときの平均の速度の定義は $v=\dfrac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta t}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \dfrac{dx}{dt}$ となるので、まさしく、**「位置を時間で微分したものが速度」** という関係が成立する。

加速度とはどのようなものだった？　これも $a=\dfrac{(v_0+\Delta v)-v_0}{\Delta t}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \dfrac{dv}{dt}$ となるので、これも、速度と同様に、**「速度を時間で微分したものが加速度」** という関係が成立する。

上の 2 つの関係を使えば、等加速度運動は微分方程式を解けばすべてが OK ということになる。その実例を次に示してみよう。最初は、「等加速度運動の公式」である。

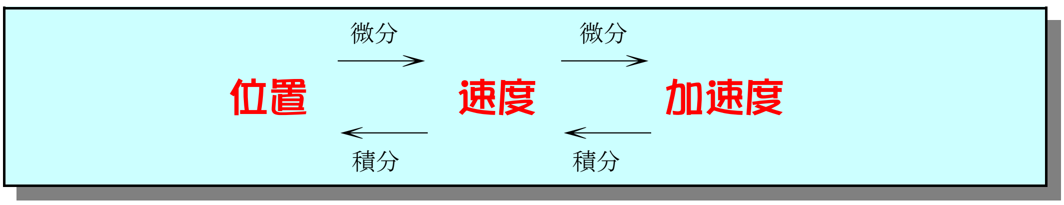
「等加速度運動の公式」と微分方程式

等加速度運動とは、「加速度が一定」という運動だから、その微分方程式は $\dfrac{dv}{dt}=a$ （a は加速度で定数）だから、この微分方程式は直接積分法で解けるものだ。 $\int \dfrac{dv}{dt}dt=\int a\,dt$ だから $v=at+C$ （C は積分定数）である。初速度（ $t=0$ のとき）が v_0 だから、代入して積分定数を求めると、 $C=v_0$ である。よって、 $v=at+v_0$ と、等加速度運動の速度の公式が得られる。

距離の公式 $x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ はどうだろうか？「速度は位置を時間で微分したもの」だから、微分方程式は $v=\dfrac{dx}{dt}$ であるから $\dfrac{dx}{dt}=at+v_0$ ということになる。直接積分法を用いて $\int \dfrac{dx}{dt}dt=\int at+v_0dt$ だから、 $x=\dfrac{1}{2}at^2+v_0t+C$ （C は積分定数）である。 $t=0$ のときの位置を $x=0$ とすると、積分定数は $C=0$ になるから、 $x=\dfrac{1}{2}at^2+v_0t$ が得られる。

これは、等加速度運動の距離の公式 $x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ そのものであることが分かる。

以上のように、等加速度運動は最も簡単な微分方程式で表せる物理現象の一つであるので、数学さえ出来れば、物理の勉強としては次に示すものだけで OK という簡単な分野になってしまう。



前回の練習問題の解答　この解答は第4回講座（変数分離形の解法）のものです。

1. $\dfrac{dy}{dx}=xy$　初期条件は、$x=0$ のとき、$y=10$ とする。（初期条件間違っていました）

変数は x 、y だから、変数分離して $\dfrac{dy}{y}=x\,dx$ である。

次に、両辺積分して、$\log|y|=\dfrac{1}{2}x^2+C$ である。よって、$y=\pm e^{\frac{1}{2}x^2+C}=\pm e^C\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ に初期条件を代入して積分変数を確定すると、この微分方程式の解は $y=10\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ である。

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3}{y+2}$　初期条件は、$x=0$ のとき、$y=0$ とする。

変数は x 、y だから、変数分離して $(y+2)dy=(2x+3)dx$ である。次に、両辺積分して、$\dfrac{1}{2}y^2+2y=x^2+3x+C$ である。初期条件を使って積分変数を確定して、微分方程式は $\dfrac{1}{2}y^2+2y=x^2+3x$ であることが分かる。

3. $\dfrac{dy}{dx}=(2x+3)y$　初期条件は、$x=0$ のとき、$y=10$ とする。

変数は x 、y だから、変数分離して $\dfrac{dy}{y}=(2x+3)dx$ である。次に、両辺積分して、$\log|y|=x^2+3x+C$ だから、$y=\pm e^{x^2+3x+C}=\pm e^C\cdot e^{x^2+3x}$ である。初期条件を使って積分変数を確定して、この微分方程式の解は $y=10\cdot e^{x^2+3x}$ である。

4. $\dfrac{dy}{dx}=\log x^y$　初期条件は、$x=1$ のとき、$y=1$ とする。

変数は x 、y だから、$\dfrac{dy}{dx}=y\log x$ だから、変数分離して、$\dfrac{dy}{y}=(\log x)dx$ である。次に、両辺積分して、$\log|y|=x\log x-x+C$ だから、$y=\pm e^{x\log x-x+C}=\pm e^C\cdot e^{x\log x-x}$ である。初期条件を使って積分変数を確定すると、$y=e^{x\log x-x+1}$ である。

［積分公式］

① $\int x^n\,dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$　（但し　$n=-1$　）

② $\int \dfrac{1}{x}dx=\log|x|+C$

③ $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

④ $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

⑤ $\int \tan x\,dx=-\log|\cos x|+C$

⑥ $\int \big(f(x)+g(x)\big)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

⑦ $\int f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)dx=f\big(g(x)\big)+C$

⑧ $\int f'(x)\cdot g(x)dx$
$=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)dx$

⑨ $\int x^n\,dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$