微分方程式入門　～ 微積分学と物理 ～　 気圧と高さ（高度計の原理）

目的　気圧を高さの関数として表すこと。 高さ h [m] における気圧を $P(h)$ [N/m^2] を求めること。

条件　温度は高さにかかわらず一定の T [K] （高度が高くなるほど気温は下がるのが普通だから、この条件は少し不自然だが..）、地上での気圧を $P(0)=P_0$ [N/m^2] とする。また、大気を構成する気体分子１個の質量を m [kg]、アボガドロ数を N_A [個/mol]、重力加速度を g [m/s^2] とする。

説明 高さが h [m] から $h+\Delta h$ [m]、底面積を S [m^2] の大気層を考える。

この大気層の平均気圧は $\overline{P}(h)=\dfrac{P(h)+P(h+\Delta h)}{2}$ とすると、この大気層の状態方程式は

$\overline{P}(h)\cdot S\Delta h = nRT$ より、大気層の気体のモル数は $n=\dfrac{\overline{P}(h)\cdot S\Delta h}{RT}$ [mol] である。

この大気層の中の分子数は nN_A [個] だから、質量は $m\cdot nN_A=\dfrac{mN_A\cdot\overline{P}(h)\cdot S\Delta h}{RT}$ [kg] だ。

大気層にかかる鉛直方向の力のつりあいから、$P(h)\cdot S=P(h+\Delta h)\cdot S+\dfrac{mN_A\cdot\overline{P}(h)\cdot S\Delta h}{RT}\cdot g$

であるから、$P(h+\Delta h)-P(h)=-\dfrac{N_A mg\overline{P}(h)\Delta h}{RT}$ である。

$\Delta P(h)=P(h+\Delta h)-P(h)$とすると、これより、$\dfrac{\Delta P(h)}{\Delta h}=-\dfrac{N_A mg\overline{P}(h)}{RT}\cdots$① である。$\Delta h$ が微小量であるので、$\lim\limits_{\Delta h\to 0}\dfrac{\Delta P(h)}{\Delta h}=\dfrac{dP(h)}{dh}$、また、$\lim\limits_{\Delta h\to 0}\overline{P}(h)=P(h)$が成立する。よって、①式は

$\dfrac{dP(h)}{dh}=-\dfrac{N_A mg}{RT}\cdot P(h)\cdots$② と表す事ができる。

②式はどのようにすれば解けるのか？　数学のテクニック（ **変数分離法** ）を使えばよい。

まず、両辺を変数分離（関数 P、変数 h の2つ）すると、$\dfrac{dP(h)}{P(h)}=-\dfrac{N_A mg}{RT}\cdot dh$ である。

これを両辺積分して、$\log_e|P(h)|=-\dfrac{mN_A g}{RT}\cdot h+C$ （Cは積分定数）$\cdots$③ になる。

対数関数を指数関数に変換し $P(h)=\pm e^{-\frac{N_A mg}{RT}\cdot h+C}=\pm e^C\cdot e^{-\frac{N_A mg}{RT}\cdot h}$ （Cは積分定数）$\cdots$④ になる。ここで、積分定数 C を決めてみよう。高さ $h=0$ での気圧（地上での大気圧）を P_0 [N/m^2] とすると（これを境界条件、初期条件という）、これを④式に代入すると、$P(0)=\pm e^C\cdot e^0=\pm e^C$ より、$\pm e^C=P_0$ に

なり、積分定数 C を決めることができる。したがって、$P(h) = P_0 \cdot e^{-\frac{N_A mg}{RT} \cdot h}$ である。

結論　高さ h [m] における気圧は $P(h) = P_0 \cdot e^{-\frac{N_A mg}{RT} \cdot h}$ と表すことができる。

参考　アボガドロ数が $N_A = 6.02 \times 10^{23}$、気体定数 $R = 8.31$[J/mol・K] である。この場合、大気の組成は窒素4:酸素1の混合気体であるから、平均分子量は28.8である。$N_A m = 28.8 \times 10^{-3}$ [kg] より、気温 $T = 300$ [K] として、$P(h) = P_0 \cdot e^{-\frac{28.8 \times 10^{-3} \times 9.8}{8.31 \times 300} \cdot h} = P_0 \cdot e^{-0.000113h}$ であるから、高度 10000[m] 程度で気圧が3分の1に低下することがわかる。