## ケプラーの第二法則（面積速度一定の法則）を微積分法で考える

ケプラーの法則は太陽系の惑星運行のルールを天体観測の結果から発見し、次の3つの法則にまとめたものです。

1. **全ての惑星は太陽をひとつの焦点とする楕円軌道を動く（楕円軌道の法則）**
2. **太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に通過する面積は常に等しい（面積速度一定の法則）**
3. **惑星の周期の2乗と軌道長半径の3乗は比例する（調和の法則）**

物理の教科書には第三法則（調和の法則）の物理的な説明が載せられているのですが、第二法則については触れていません。そこで、この第二法則を物理的に考えてみることにしました。

### ［質問が出た問題］

生徒から質問が出た 2002 年聖マリアンナ医大（改）とあるセミナー物理の発展問題を次に紹介しよう。

> 水平に置かれた滑らかな板の中央に穴をあけ、その上に物体を置き、穴から通した糸を結びつけ板の上で糸の長さで円運動させる。ゆっくり糸を引くと円運動の半径が徐々に小さくなり、物体の速度は速くなる。このとき、物体の運動において 「面積速度一定の法則」 が成立しているというわけである。

ケプラーの法則にある面積速度一定の法則を使わずにこの問題を解くことができることを示してみよう。最初は、仕事の定義からはじめ、微積分法を使って計算してゆこう。

### ［基本に戻る］

仕事は定義によると**「仕事＝力×距離」**だから、「糸の張力×引いた糸の長さ分」としたいところだが、糸の張力が変化するため使えない。そこで、微積分の登場となる。

時刻 $t$ のとき、半径 $r$ 、速さ $v$ で円運動している。時刻 $t+\Delta t$ のとき、半径が $r+\Delta r$ になったとき、速さ $v+\Delta v$ になるとしよう。このとき、 $\Delta t$ は非常に小さいとすると、半径、速さの変化は小さい。

時刻 $t$ のときの糸の張力は円運動の向心力 $f=m\cdot\dfrac{v^2}{r}$ に相当するから、 $\Delta t$ の間に糸が物体にする仕事は $\Delta W=-\left(m\cdot\dfrac{v^2}{r}\right)\times\Delta r$ ・・・① が成立する。

### ［物体に与える仕事は運動エネルギーの増加へ］

物体の運動エネルギーの変化は $\Delta K=\dfrac{1}{2}m(v+\Delta v)^2-\dfrac{1}{2}mv^2$ だから、微小量の積は無視できるから $\Delta K=mv\cdot\Delta v$ ・・・② としてよい。

力学的エネルギー保存の法則から、**「物体に与えた仕事分だけ運動エネルギーが増える」**はずだから、①、②より $mv\cdot\Delta v=-\left(m\cdot\dfrac{v^2}{r}\right)\times\Delta r$ が成立する。

これを整理して $\dfrac{1}{v}\Delta v=-\dfrac{1}{r}\Delta r$ が成立する。つぎに微積分法へとバトンタッチだ。

### ［微積分法を活用すると］

$\Delta t$ がゼロに近いとすると $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dr}{r}$ と書き直すことが出来る。

両辺に積分記号をかけて $\displaystyle\int\frac{1}{v}dv=\int-\frac{1}{r}dr$ となる。

積分計算して $\log|v|=-\log|r|+C$ （$C$ は積分定数）である。

これより、対数をはずすと、 $vr=e^C$ となる。右辺は定数である。

よって、**円周速度 v × 半径 r ＝ 一定** が成立することが分かる。

以上より、「面積速度一定の法則」が導けたことになる。