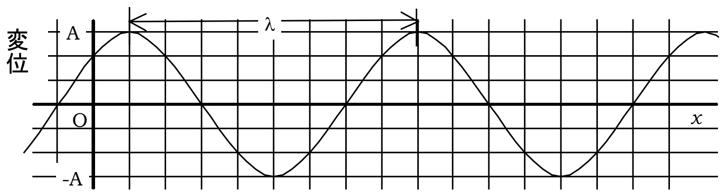
波動の公式と微積分法

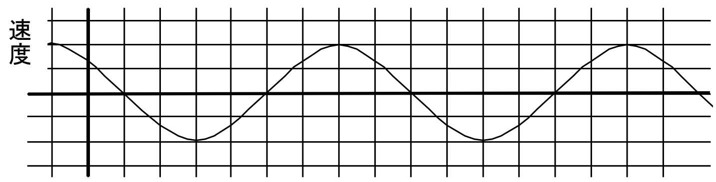
位置と速度と加速度の関係

時間ｔで微分、積分することにより、右に示すように変換できる。

$$\text{位置ベクトル} \underset{t\text{で積分}}{\overset{t\text{で微分}}{\rightleftarrows}} \text{速度ベクトル} \underset{t\text{で積分}}{\overset{t\text{で微分}}{\rightleftarrows}} \text{加速度ベクトル}$$

波の方程式





媒質の変位

$$y = A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \delta\right\}$$

媒質の振動の速度

$$v = \frac{dy}{dt} = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \delta\right\}$$

媒質の振動の加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \delta\right\}$$

$a = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 y$　（ 角振動数 ω を使えば、$a = -\omega^2 y$ ）

波の微分方程式

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 y$ 、$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 y$ より、 $T^2\dfrac{d^2y}{dt^2} = \lambda^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$

波の進行速度は $V = \dfrac{\lambda}{T}$ だから、$\dfrac{d^2y}{dt^2} = V^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$ が成立する。

これを波の微分方程式と呼んでいる。

波の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = V^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

これは、**「変位の時間による2次微分係数」**が、**「変位の位置による2次微分係数」 × 「波の進行速度の2乗」**に等しいことを示している。

参考　**微積分学を使って、弦を伝わる波の速度を求めてみよう。**

弦の振動の場合、弦の一部（ x から $x+\Delta L$ ）の長さ ΔL の微小部分について考えてみる。 弦の接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}$ である。弦の傾きが小さいので $\dfrac{dy}{dx} = \tan\theta = \sin\theta$ とみなせる。 よって、弦が受ける張力の y 軸方向成分は、$F_y = T\cdot\dfrac{dy(x+\Delta L)}{dx} - T\cdot\dfrac{dy(x)}{dx} = T\dfrac{d^2y}{dx^2}\Delta L$ とかける。 弦の微小部分の質量は $m = \rho\cdot\Delta L$ （ ρ は線密度 ）だから、運動方程式は $ma = T\dfrac{d^2y}{dx^2}\Delta L$ である。 このとき、加速度は $a = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ とかけるから、微分方程式 $\rho\dfrac{d^2y}{dt^2} = T\dfrac{d^2y}{dx^2}$ が導かれる。 これより、$\dfrac{d^2y}{dt^2} = \left(\dfrac{T}{\rho}\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}$ であるので、波の微分方程式と比較すると $V^2 = \dfrac{T}{\rho}$ が得られる。 よって、弦を伝わる波の速さの公式 $V = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ が導かれる。