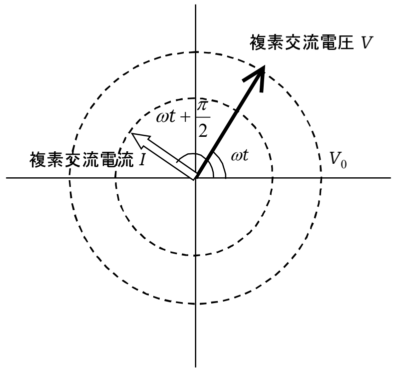
交流ベクトル理論　　　　（　　）組（　　）番　氏名　（　　　　　　　）

交流理論とベクトル・複素平面（参考）



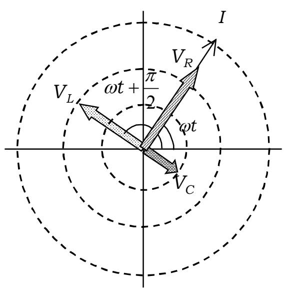
電圧が $V=V_0\sin\omega t$ の交流をを複素数で表現すると、交流電圧が $V=V_0(\cos\omega t+i\sin\omega t)$（これを、$\cos\omega t+i\sin\omega t=e^{i\omega t}$ と定義し、$V=V_0e^{i\omega t}$ と定義する）ことができる。我々が見えるものは、この複素数で示される交流の実数部分 $V=V_0\cos\omega t$ であると考える。右図に示すように、複素平面上で等速円運動する複素数である。原点からの位置ベクトルが交流電圧を表す。長さが交流電圧の大きさ、偏角が交流電圧の位相を表している（同様に電流も表すことができる）。

コンデンサーのリアクタンスは $Z=\dfrac{1}{i\omega C}=0-\dfrac{1}{\omega C}i=\dfrac{1}{\omega C}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ である。

コンデンサーに流れる電流は $I=\dfrac{V}{Z}$ より、$I=\dfrac{V_0e^{i\omega t}}{\dfrac{1}{\omega C}e^{-i\frac{\pi}{2}}}=\omega CV_0e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}$ になる。これより、複素電流の大きさが ωCV_0、位相が $\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。複素交流電流ベクトルは複素平面を回転するが、われわれが見るのは実数部分になる。したがって、$I=\omega CV_0e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}=\omega CV_0\left\{\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$ より、$I_C=\omega CV_0\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。

抵抗の場合は、$Z=R=Re^0$ より、$I=\dfrac{V_0e^{i\omega t}}{Re^0}=\dfrac{V_0}{R}e^{i\omega t}$ だから、$I_R=\dfrac{V_0}{R}\cos(\omega t+0)$ である。

コイルの場合は、$Z=i\omega L=\omega Le^{i\frac{\pi}{2}}$ より、$I=\dfrac{V_0e^{i\omega t}}{\omega Le^{i\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{V_0}{\omega L}e^{i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}$ だから、$I_L=\dfrac{V_0}{\omega L}\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。



LCR 回路（直列）の例　回路の電流を $I=I_0\cos\omega t$ を基準とすると、電圧の位相は、コイルの場合は電流に対して $\dfrac{\pi}{2}$ 進み、コンデンサーの場合は $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れる。抵抗の場合は位相ずれない。また、電圧の最大値は $V=I\cdot Z$ より、抵抗の場合 $V_R=I_0\cdot R$、コイルの場合 $V_R=I_0\cdot\omega L$、コンデンサーが $V_R=I_0\cdot\dfrac{1}{\omega C}$ である。直列回路になっているので、それぞれの電圧の和が全体の電圧に相当するので、ベクトルの和を求めると、$\sqrt{V_R{}^2+(V_L-V_C)^2}=I_0\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ が電圧の最大値である。また、電圧のベクトルは、電流のベクトルより、δ（ただし、$\tan\delta=\dfrac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}$）回転角が大きい（電流が電圧より位相が遅れていることを示している）。したがって、回路の電流を $I=I_0\cos\omega t$ とすると、回路の電流を

$V=I_0\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}\cos(\omega t+\delta)$ である。 また、回路の電圧を $V=V_0\cos\omega t$ とすると、回路の電流を $I=\dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\cos(\omega t-\delta)$ である。 この回路では、角速度 $\omega\ (=2\pi f)$ の変化により電流値が変化し、電流が最も大きくなる振動数は $f=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ のときであり、そのときの電流は $I_{\max}=\dfrac{V_0}{R}\cos\omega t$ （電圧・電流の位相ずれなし） となる。

$\boxed{\text{LCR回路（並列）の例}}$ 回路の電圧を $V=V_0\cos\omega t$ を基準とすると、電流の位相は、コイルの場合は電流に対して $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れ、コンデンサーの場合は $\dfrac{\pi}{2}$ 進む。 抵抗の場合は位相ずれない。また、電流の最大値は $V=I\cdot Z$ より、抵抗の場合 $I_R=\dfrac{V_0}{R}$、コイルの場合 $I_L=\dfrac{V_0}{\omega L}$、コンデンサーの場合 $I_R=\dfrac{V_0}{1/(\omega C)}=\omega CV_0$ である。並列回路になっているので、それぞれの電流の和が全体の電流に相当するので、ベクトルの和を求めると、$\sqrt{{I_R}^2+(I_C-I_L)^2}=V_0\sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2+\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)^2}$ が電流の最大値である。また、電流のベクトルは、電圧のベクトルより、δ （ ただし、$\tan\delta=\dfrac{\omega C-\dfrac{1}{\omega L}}{R}$ ） 回転角が小さい（電流が電圧より位相が進んでいることを示している）。 したがって、回路の電流を $V=V_0\cos\omega t$ とすると、回路の電流を $I=V_0\sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2+\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)^2}\cos(\omega t-\delta)$ である。 また、回路の電圧を $I=I_0\cos\omega t$ とすると、回路の電流を $V=\dfrac{I_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2+\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)^2}}\cos(\omega t+\delta)$ である。 この回路では、角速度 $\omega\ (=2\pi f)$ の変化により電流値が変化し、電流が最も小さくなる振動数は $f=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ のときであり、そのときの電流は $I_{\max}=\dfrac{V_0}{R}\cos\omega t$ （電圧・電流の位相ずれなし） となる。