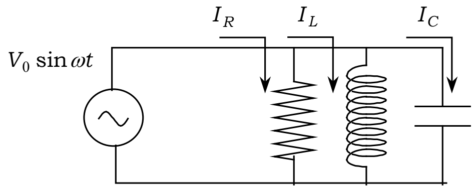
共振回路・並列 と 複素インピーダンス理論 　　　　（　　　）組（　　　）番　氏名　（　　　　　　　　　　　）

抵抗、コイル、コンデンサーの並列回路

交流電源の全体の電圧が $V = V_0 \sin \omega t$ 、 全体の電流が $I = I_0 \sin(\omega t + \delta)$ とし、それぞれの電流は



抵抗の電流 → $I_R = \dfrac{V_0}{R} \sin \omega t$ である。

コイルの電流 → $I_L = \dfrac{V_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$

コンデンサーの電流 → $I_C = \dfrac{V_0}{1/\omega C} \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \omega C V_0 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \omega C V_0 \cos \omega t$

回路を流れる全体の電流は $I = I_C + I_L + I_R$ であるから、$I = \omega C V_0 \cos \omega t - \dfrac{1}{\omega L} V_0 \cos \omega t + \dfrac{V_0}{R} \sin \omega t$ になる。

$I = \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right) V_0 \cos \omega t + \dfrac{V_0}{R} \sin \omega t = V_0 \sqrt{\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{R}\right)^2} \sin(\omega t + \delta)$ ただし、$\tan \delta = R\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$ だから、

$I_0 = V_0 \sqrt{\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{R}\right)^2}$ である。したがって、回路の抵抗としての働き（インピーダンス）の大きさは

$Z = \dfrac{V_0}{I_0} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2 + \dfrac{1}{R^2}}}$ [Ω] になる。

共振周波数

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

回路を流れる電流が最小になる条件 電流を最小にするには、

$Z = \dfrac{V_0}{I_0} = 1 \Big/ \sqrt{\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2 + \dfrac{1}{R^2}}$ が最大になればよい。このとき、

$\sqrt{\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2 + \dfrac{1}{R^2}}$ が最小であるから、$\omega C - \dfrac{1}{\omega L} = 0$ が条件になる。 したがって、 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ だから、交流の振動数 $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ [Hz] のとき、交流電流が最小である。

これは特定の振動数 $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ の交流を通すフィルタとしての働きがこの回路にあることを示している。

複素インピーダンス理論（参考） （電圧、電流、インピーダンスを複素数として扱い、体系化した理論）

交流電圧を $V = V_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)$ （これを、$\cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}$ と定義し、 $V = V_0 e^{i\omega t}$ と定義する）

抵抗が $Z_R = R + 0i = R(\cos 0 + i \sin 0) = Re^0$ 、コイルが $Z_L = 0 + i\omega L = \omega L\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right\} = \omega L e^{\frac{\pi}{2}i}$ 、

コンデンサーが $Z_C = 0 + \dfrac{1}{i\omega C} = \dfrac{1}{\omega C}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\} = \dfrac{1}{\omega C} e^{-\frac{\pi}{2}i}$ とし、複素オームの法則 $V = IZ$ を当てはめる。実際に見えるのは、実空間の値だから、実数部分の電流、電圧が現実のものである。

抵抗の場合 抵抗に流れる電流は、$I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V_0 e^{i\omega t}}{Re^0} = \dfrac{V_0}{R} e^{i\omega t} = \dfrac{V_0}{R}(\cos \omega t + i \sin \omega t)$ だ。実際に見えるのは、実空間の電流だから、$I_R = \dfrac{V_0 \cos \omega t}{R}$ であり、位相ずれがないことを示している（上の結果と一致している）。

$\boxed{\text{コイルの場合}}$ コイルに流れる電流は、$I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V_0 e^{i\omega t}}{\omega L e^{\frac{\pi}{2}i}} = V_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{V_0}{\omega L}\left\{\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$ だ。

実空間の電流が答えだから、$I_L = \dfrac{V_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。電流の位相が $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れることを示している。

$\boxed{\text{コンデンサの場合}}$ 同様にして、コンデンサーに流れる電流は、$I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V_0 e^{i\omega t}}{(1/\omega C)e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \omega C V_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$ だから、

$I = \omega C V_0\left\{\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$ になる。実数空間の電流が答えだから、$I_L = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。 電流の位相は、電圧に比べて $\dfrac{\pi}{2}$ 進むことを示している。

$\boxed{\text{抵抗、コイル、コンデンサ直列の場合}}$ 直列だから、複素インピーダンスは $Z = Z_R + Z_L + Z_C$ より、

$Z = (R + 0i) + (0 + i\omega L) + \left(0 + \dfrac{1}{i\omega C}\right) = R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot e^{i\delta}$ 但し $\tan\delta = \dfrac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R}$

である。回路に流れる電流は、$I = \dfrac{V}{Z}$ より、$I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{i(\omega t - \delta)}$ だから、

$I = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\{\cos(\omega t - \delta) + i\sin(\omega t - \delta)\}$ になる。実際の電流は、実空間の電流であるので、

$I = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\cos(\omega t - \delta)$ である。位相のずれは δ 但し、$\tan\delta = \dfrac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R}$ 遅れる。

$\boxed{\text{抵抗、コイル、コンデンサ並列の場合}}$ 並列の複素合成インピーダンスは、$\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_R} + \dfrac{1}{Z_L} + \dfrac{1}{Z_C}$ だから、

$\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\omega L e^{\frac{\pi}{2}i}} + \dfrac{1}{(1/\omega C)e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\omega L}e^{-\frac{\pi}{2}i} + \omega C e^{\frac{\pi}{2}i} = \dfrac{1}{R} + i\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$ であるので、合成インピーダンス

は $Z = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + i\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}} \cdot e^{i\delta}$ ただし、$\tan\delta = R\left(\dfrac{1}{\omega L} - \omega C\right)$ である。したがって、電流

は、$I = \dfrac{V}{Z} = V_0 e^{i\omega t} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2} \cdot e^{-i\delta} = V_0\sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2} e^{i(\omega t - \delta)}$ である。実数部分が答え

だから、$I = V_0\sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}\cos(\omega t - \delta)$ である。