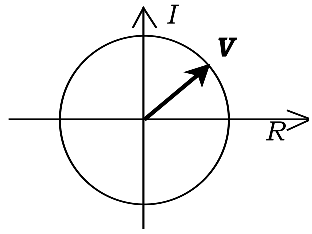
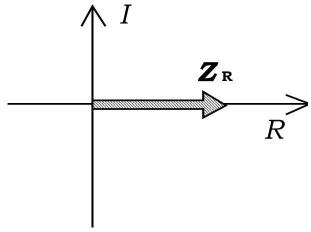
複素インピーダンス理論　　　（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　）

複素インピーダンス理論（参考）　（電圧、電流、インピーダンスを複素数として扱い、体系化した理論）



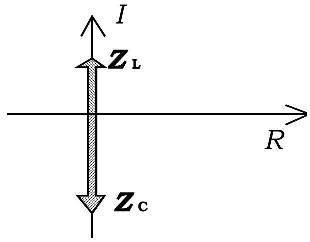
交流電圧を $V = V_0(\cos\omega t + i\sin\omega t)$（これを、$\cos\omega t + i\sin\omega t = e^{i\omega t}$ と定義し、$V = V_0 e^{i\omega t}$ と定義する） 複素平面では、交流電圧、交流電流は原点を中心とした等速円運動運動の複素数と考える。

抵抗の複素インピーダンスは $Z_R = R + 0i = R(\cos 0 + i\sin 0) = Re^0$ と表すことができる。（複素平面で示すと右図）



コイルは、自己誘導の定義式 $V = (-)L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ より、 $V_0 e^{i\omega t} = L\dfrac{dI}{dt}$ だから、

$\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{V_0}{L}e^{i\omega t}$ より、積分すると、$I = \dfrac{V_0}{i\omega L}e^{i\omega t}$ より、コイルの複素インピーダンスは $Z_L = \dfrac{V}{I} = i\omega L = \omega L e^{\frac{\pi}{2}i}$ と表すことができる（複素平面で示すと右図）。普通に書けば $Z_L = \omega L e^{\frac{\pi}{2}i} = \omega L\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right\} = 0 + i\omega L$ である。コンデンサーの場合は、$Q = CV$ 、$\dfrac{dQ}{dt} = I$ より、$I = \left(CV_0 e^{i\omega t}\right) = i\omega CV_0 e^{i\omega t}$ だから、



コンデンサーの複素インピーダンスは $Z_C = \dfrac{V}{I} = \dfrac{1}{i\omega C} = \dfrac{1}{\omega C}e^{-\frac{\pi}{2}i}$ と表すことができる（複素平面で示すと右図）。

普通に書けば $Z_C = 0 + \dfrac{1}{i\omega C} = \dfrac{1}{\omega C}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\} = \dfrac{1}{\omega C}e^{-\frac{\pi}{2}i}$ である。 これら複素インピーダンスについて、「複素オームの法則 $V = IZ$ 」に適用するとすべて片づくのだ。なお、実際に我々が見えるのは、実空間の値だから、実数部分の電流、電圧が現実のものである。

抵抗の場合　抵抗に流れる電流は、$I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V_0 e^{i\omega t}}{Re^0} = \dfrac{V_0}{R}e^{i\omega t} = \dfrac{V_0}{R}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ だ。実際に見えるのは、実空間の電流だから、$I_R = \dfrac{V_0\cos\omega t}{R}$ であり、位相ずれがないことを示している（上の結果と一致している）。

コイルの場合　コイルに流れる電流は、$I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V_0 e^{i\omega t}}{\omega L e^{\frac{\pi}{2}i}} = V_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{V_0}{\omega L}\left\{\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$ だ。

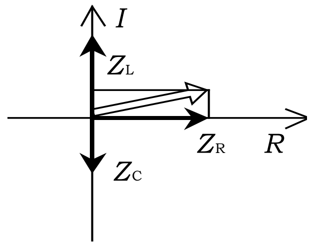
実空間の電流が答えだから、$I_L = \dfrac{V_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。電流の位相が $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れることを示している。

コンデンサの場合　同様にして、コンデンサーに流れる電流は、$I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V_0 e^{i\omega t}}{(1/\omega C)e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \omega CV_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$ だから、

$I = \omega CV_0\left\{\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$ になる。実数空間の電流が答えだから、$I_L = \omega CV_0\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。 電流の位相は、電圧に比べて $\dfrac{\pi}{2}$ 進むことを示している。

抵抗、コイル、コンデンサ直列の場合　直列だから、合成複素インピーダンスは　$Z = Z_R + Z_L + Z_C$　より、

$$Z = (R + 0i) + (0 + i\omega L) + \left(0 + \frac{1}{i\omega C}\right) = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot e^{i\delta}$$



但し $\tan\delta = \dfrac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R}$　である（複素平面で見ると、インピーダンスが絶対値、位相のずれ δ が偏角に相当していることが分かる）。回路に流れる電流は、$I = \dfrac{V}{Z}$

より、$I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{i(\omega t - \delta)}$ だから、$I = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \{\cos(\omega t - \delta) + i\sin(\omega t - \delta)\}$ になる。

実際の電流は、実空間の電流であるので、$I = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \delta)$ である。位相のずれは　δ　但し、

$\tan\delta = \dfrac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R}$　遅れる。

抵抗、コイル、コンデンサ並列の場合　並列の複素合成インピーダンスは、$\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_R} + \dfrac{1}{Z_L} + \dfrac{1}{Z_C}$　だから、

$\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\omega L e^{\frac{\pi}{2}i}} + \dfrac{1}{(1/\omega C) e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\omega L} e^{-\frac{\pi}{2}i} + \omega C e^{\frac{\pi}{2}i} = \dfrac{1}{R} + i\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$　であるので、合成インピーダンス

は $Z = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + i\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}} \cdot e^{i\delta}$　ただし、$\tan\delta = R\left(\dfrac{1}{\omega L} - \omega C\right)$　である。したがって、電

流は、$I = \dfrac{V}{Z} = V_0 e^{i\omega t} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2} \cdot e^{-i\delta} = V_0 \sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2} e^{i(\omega t - \delta)}$　である。実数部分が答

えだから、$I = V_0 \sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2} \cos(\omega t - \delta)$　である。