電池の内部抵抗とコンデンサーの充電過程

乾電池（内部抵抗を r オーム、起電力を E ボルトとする）を使って電気容量が不明のコンデンサーを充電する実験を行った。このコンデンサーの電気容量は大きく、充電には時間がかかった。その充電過程を、経過時間 t 秒、コンデンサーに流れる電流 I アンペア、コンデンサーの電圧 V ボルトを測定した。測定結果は次の通りであった。

経過時間が $t_1 = T$ [s]（ただし、T は十分小さな値）のとき、コンデンサーに流れ込む電流が I_1 [A]、コンデンサーの電圧が V_1 [V] になり、経過時間が $t_2 = 2T$ [s] のとき、コンデンサーに流れ込む電流が I_2 [A]、コンデンサーの電圧が V_2 [V]、経過時間が $t_2 = 3T$ [s] のとき、コンデンサーに流れ込む電流が I_3 [A]、コンデンサーの電圧が V_3 [V]、… 、 経過時間が $t_n = nT$ [s] のとき、コンデンサーに流れ込む電流が I_n [A]、コンデンサーの電圧が V_n [V]、経過時間が $t_{n+1} = (n+1)T$ [s] のとき、コンデンサーに流れ込む電流が I_{n+1} [A]、コンデンサーの電圧が V_{n+1} [V] であるとする。

問1．充電開始直後の電流値はいくらであったか。

経過時間 $t = t_n$ 秒、$t = t_{n+1}$ 秒の二つの測定値を使ってこのコンデンサーの電気容量を求めてみよう。コンデンサーの電気容量を C [F] としておこう。

問2．t_1 [s] のとき、コンデンサーに貯まっている電気量を、<u>コンデンサーの電気容量 C を使って</u> 表しなさい。

問3．t_1 [s] のとき、コンデンサーに貯まっている電気量を、<u>コンデンサーの電気容量 C を使わずに</u> 表しなさい。

問4．コンデンサーの電気容量 C を、I_1、V_1、T を使って表しなさい。

問5．t_n 秒から t_{n+1} 秒の間でのコンデンサーに蓄えられている電気量の変化を <u>コンデンサーの電気容量 C をつかって</u> 表しなさい。

問6．t_n 秒から t_{n+1} 秒の間でのコンデンサーに蓄えられている電気量の変化を <u>コンデンサーの電気容量 C を使わずに</u> 表しなさい。

問7．コンデンサーの電気容量 C を、I_n、V_n、I_{n+1}、V_{n+1}、T を使って表しなさい。

同じ電池で電気容量を C [F] のコンデンサーを充電する。スイッチを入れてから t [s] のときのコンデンサーの電圧を V [V]、電流を I [A] とする。

問8．t [s] から微少時間 Δt [s] 後（時刻 $t + \Delta t$）のコンデンサーの電圧 V' [V] を求めよ。

問9．時刻 t のときの電流-時間のグラフの傾き $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ の値を求めなさい。

問10．コンデンサーの電圧 V を、時間 t の関数として表しなさい。［出来たら偉い！（ハイレベルの数学力が必要）］

解答・解説

問1．コンデンサーの電圧はゼロだから、内部抵抗にかかる電圧が起電力全体になる。オームの法則より、$I_0=\dfrac{E}{r}$ [A] である。

問2．コンデンサーの電気容量を C [F] とするので、コンデンサーの公式 $Q=CV$ より、コンデンサーに蓄えられている電気量は $Q=CV_1$ [C] である。

問3．ここで新しい考えかたを見つけよう。コンデンサーの電気量は「流れ込んだ電流が運んだ電気量」である。電流は「単位時間に流れる電気量」だから、電流を縦軸に、時間を横軸にとるグラフの面積が電気量にあたることに気づけばよい。コンデンサーに蓄えられている電気量は $Q_1=\dfrac{1}{2}I_1t_1=\dfrac{I_1T}{2}$ [C] である。

問4．問 2、3 の解は一致するはずだから、$CV_1=\dfrac{I_1T}{2}$ より、電気容量は $C=\dfrac{I_1T}{2V_1}$ [F] だ。

問5．コンデンサーの公式より、t_n 秒のときの電気量は $Q_n=CV_n$ [C]、t_{n+1} 秒のときの電気量は $Q_{n+1}=CV_{n+1}$ [C] だから、電気量の増加は $\Delta Q=Q_{n+1}-Q_n=C(V_{n+1}-V_n)$ [C] である。

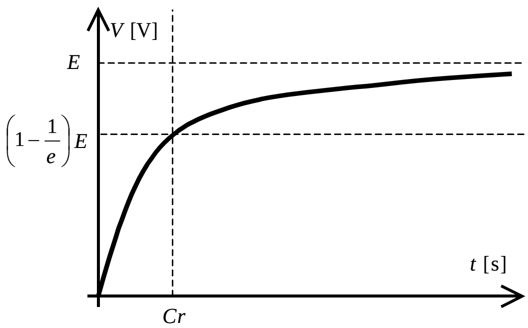
問6．問 3 と同様にして、面積より、$\Delta Q=\dfrac{(I_n+I_{n+1})T}{2}$ [A] である。

問7．問 5、6 は同一のはずだから、$C(V_{n+1}-V_n)=\dfrac{(I_n+I_{n+1})T}{2}$ より、$C=\dfrac{(I_n+I_{n+1})T}{2(V_{n+1}-V_n)}$ [F] である。

問8．このとき、流れ込む電流値は $I=\dfrac{E-V}{r}$ であるから、Δt [s] にコンデンサーに流れ込んだ電気量は Δt が微少だから $\Delta Q=I\Delta t$ とみなせる。よって、$t+\Delta t$ のときのコンデンサーの電気量は $Q'=Q+\Delta Q=Q+\dfrac{E-V}{r}\Delta t$ である。$Q=CV$、$Q'=CV'$ より、$V'=V+\dfrac{E-V}{Cr}\Delta t$ である。

問9．$V'=V+\dfrac{E-V}{Cr}\Delta t$ より、$\Delta V=V'-V=\dfrac{E-V}{Cr}\Delta t$ だから、傾きは $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=\dfrac{E-V}{Cr}$ である。

問10．Δt が微少なら、$\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=\dfrac{E-V}{Cr}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\left(\dfrac{1}{Cr}\right)(V-E)$ である。ここで、$V-E=f(t)$ とすると、$\dfrac{d}{dt}f(t)=-\dfrac{1}{Cr}f(t)$ とかける。「微分した関数が元の関数の定数倍になる」関数は 指数関数だ。 よって、$f(t)=Ke^{-\frac{1}{Cr}t}$ （K は定数） だから、電圧は $V=Ke^{-\frac{1}{Cr}t}+E$ である。時刻 0 のときの電圧は ゼロだから、$0=Ke^{-\frac{1}{Cr}\times 0}+E$ だから、定数 $K=-E$



である。よって、コンデンサーの電圧は時間 t の関数 $V=E\left(1-e^{-\frac{1}{Cr}t}\right)$ と表すことが出来る。

内部抵抗が $1.0[\Omega]$、コンデンサーの容量が $1.0[\mu\mathrm{F}]$ として充電時間を求めてみると、$V = E\left(1 - 2.71828^{-1000000t}\right)$ である。充電時間が $t = \dfrac{1}{1000000}$[s]（100 万分の1秒）のとき、電圧は $V = E(1 - 0.36) = 0.64E$ になり、$t = \dfrac{5}{1000000}$ [s]（100 万分の 5 秒）の充電で、ほぼ、$V = E$ になって、充電は完了してしまう。 このように、普通に使われているコンデンサーの場合、充電は一瞬に終わってしまうことが多い。