電流と磁界（参考）　～ビオサバールの法則～

直線電流が作る磁界の公式 $H=\dfrac{I}{2\pi r}$ 、円電流が中心に作る磁界の公式 $H=\dfrac{I}{2r}$ 、ソレノイドの内部にできる磁界の公式 $H=nI$ の3つのケースについては、磁界を求める公式が教科書に与えら得ている。

この公式はどのようにして導かれたものなのか、物理に興味深い人は知りたいのではないだろうか？　また、それ以外の電流が作る磁界についての計算方法はあるのかなどについても、次に示す「ビオサバールの法則」が以上の疑問点についてすべて解決してくれる。

ビオサバールの法則

① 電流 I が流れる導線の微小長さ $d\vec{s}$ とするとき、位置 $\vec{r}$ に作る磁場は、 $\vec{s}$ と $\vec{r}$ の間の角度を θ とすると、

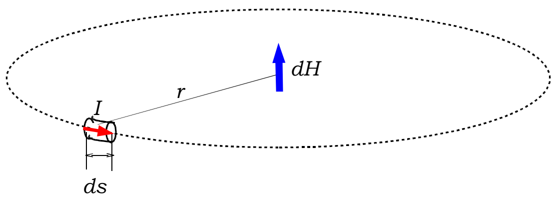
$dH=\dfrac{I\sin\theta\cdot ds}{4\pi r^2}$ となる。（ベクトル表記では $d\vec{H}=\dfrac{I\cdot d\vec{s}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$ ）

② 荷電粒子（電気量 q ）が速度 v で動くとき、位置 $\vec{r}$ に作る磁場は、 $\vec{v}$ と $\vec{r}$ の間の角度を θ とすると、

$dH=\dfrac{qv\sin\theta}{4\pi r^2}$ となる。（ベクトル表記では $d\vec{H}=\dfrac{q\cdot d\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$ ）

なお、ベクトル表記には外積（内積とは異なるベクトル演算で、高校数学では未学習）を使っているので、以降はスカラー表記の $dH=\dfrac{I\sin\theta\cdot ds}{4\pi r^2}$ を使って、考えてみよう。

円電流の中心にできる磁界



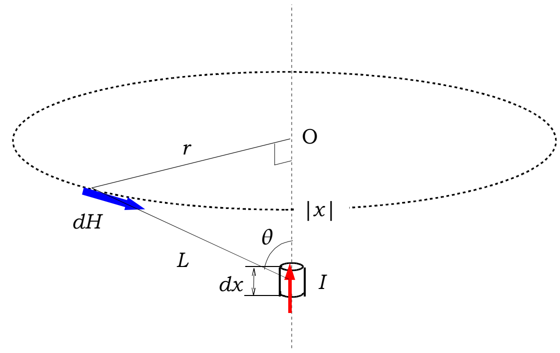
半径 r の円形電線に電流 I が流れているときの円形電線の中心にできる磁界をビオサバールの法則から求めてみよう。円形電線の微小長さ ds とすると、その部分が円形電線の中心位置に作る磁界は $dH=\dfrac{I\sin 90°\cdot ds}{4\pi r^2}=\dfrac{I\,ds}{4\pi r^2}$

である。磁界 H を求めるには円形電線にそって積分すればよいので $H=\int\left(\dfrac{I}{4\pi r^2}\right)ds$ である。 $\dfrac{I}{4\pi r^2}$ は定数だから、積分の外に出して、円周の長さ分にわたって積分すればよいから

$H=\left(\dfrac{I}{4\pi r^2}\right)\cdot\int ds=\left(\dfrac{I}{4\pi r^2}\right)\cdot 2\pi r$ となり、磁界の強さは $H=\dfrac{I}{2r}$ である。よって、円形電流の中心に作られる磁界の公式 $H=\dfrac{I}{2r}$ が導かれた。

直線電流が作る磁界

x 軸に電流が I が流がしたとき、電流から r 離れた位置にできる磁界を求めてみよう。電線の微小長さ dx が作る磁界は $dH=\dfrac{I\sin\theta\cdot dx}{4\pi L^2}$



$L=\sqrt{x^2+r^2}$ 、 $\sin\theta=\dfrac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}$ になる。磁界を求めるには、直線に沿って積分すればよいのだが、この場合微小電線の位置により距離 r 、角度 θ が変化するので積分の方法が難しい。

$H=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I\sin\theta\cdot dx}{4\pi L^2}$ を求めるだけなのだが…。

このまま x を積分変数とすると計算が難しいことが分かる。そこで、置換積分法を使って、積分変数が θ と変えれば計算ができるようになる。その準備として、 $\dfrac{d\theta}{dx}$ を求める作業からはじめる。

$\sin\theta=\dfrac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}$ を x で微分して $\cos\theta\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{rx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2+r^2}}$ であり、 $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$ だから、 $\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{r}{x^2+r^2}$ になる。これで、置換積分により、積分変数を変えることができる。

積分変数を x から θ に変換して、 $H=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{I\sin\theta\cdot d\theta}{4\pi r}=\frac{I}{4\pi r}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot d\theta$ となり、積分が簡単に実行できる形になった。積分を実行すると $H=\dfrac{I}{4\pi r}\left|-\cos\theta\right|_0^{\pi}$ だから、 $H=\dfrac{I}{2\pi r}$ である。

よって、直線電流が作る磁界の公式 $H=\dfrac{I}{2\pi r}$ が導かれた。

達人 電流が I 、半径が r の円形電流の中心より中心軸上を距離 x 離れた位置に作られる磁界を求めなさい。