微積分法を用いた物理学

『空気抵抗のある運動』~ 雨粒の落下を物理する！ ~

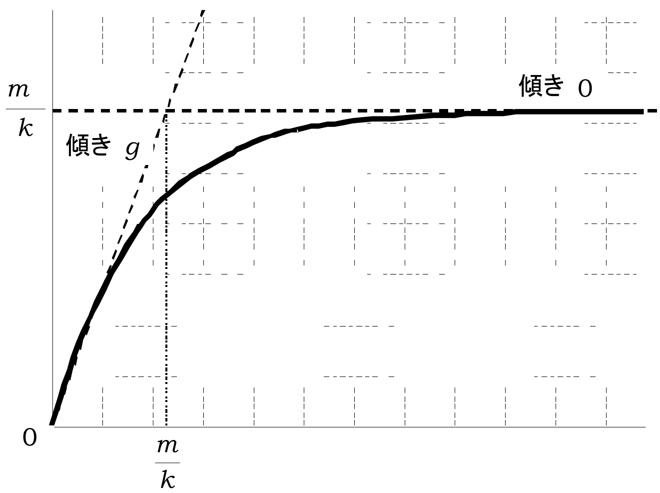
速度が小さい場合、流体中での抵抗は速度に比例するといわれている。空気抵抗力は $R=kv$ と表すことができる。 k は物体の形や流体の粘性などにより変わる比例定数である。また、速度が大きくなるにつれて、速度の2乗の項が無視できなくなるが、雨粒はそれほど速い物体ではないので考慮しないものとする。

一般に、雨粒は、どのように落ちてくるのか、空気抵抗の式 $R=kv$ を使って、運動方程式を立てて解いてみよう。雨粒の質量を m とすると、雨粒の運動方程式は $ma=mg-kv$ である。加速度は速度の変化であるから、$a=\dfrac{dv}{dt}$ であるから、$m\cdot\dfrac{dv}{dt}=mg-kv$ より、微分方程式 $\dfrac{dv}{dt}=g-\dfrac{k}{m}\cdot v$ …① （ただし、初期条件は $t=0$ のとき、$v=0$ である。）が成立する。

上の微分方程式を解いてみよう。変数は v と t だから、左辺に v、右辺に t の変数を集めて整理する（変数分離して）、変数分離して $\dfrac{dv}{\left(g-\dfrac{k}{m}\cdot v\right)}=dt$ になるので、$\displaystyle\int\dfrac{dv}{\left(g-\dfrac{k}{m}\cdot v\right)}=\int dt$ であるから、両辺を積分すると、$\dfrac{m}{k}\log_e\left|\dfrac{k}{m}v-g\right|=-t+C$ （Cは積分定数）である。対数関数を指数関数に変換すると、$\dfrac{k}{m}v-g=\pm e^{-\frac{k}{m}t+C'}$ であるから、$\dfrac{k}{m}v-g=\pm K\,e^{-\frac{k}{m}t}$ （Kは定数）になる。これに、上の初期条件（時刻ゼロのとき、速度ゼロ）を代入して、定数Kを求めると、$K=\pm g$ である。

これより、雨粒の時刻 t における落下速度は $v=\dfrac{mg}{k}\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ と表すことができる。

よって、時刻 $t=0$ のとき $a=\dfrac{dv}{dt}=+g$ 、$t=\infty$ のとき $a=\dfrac{dv}{dt}=+g\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot\infty}=0$ である。



これらより、$v-t$ グラフは、原点付近（ $t=0$ ）では傾き g の直線に、また、十分時間がたったとき（ $t=\infty$ ）には、傾きゼロの直線に沿う曲線になる。

また、$t=\dfrac{m}{k}\times 3$ の時刻では、$e^{-3}\simeq 0.050$ であるので、このときの速度は $v_\infty=\dfrac{mg}{k}$ の約 95% になっていることがわかる。

実際の雨粒が 10[m/s] 程度の落下速度であるなら、$\dfrac{mg}{k}=10$ より、$\dfrac{m}{k}\simeq 1$ だから、落下後3秒程度でほぼ終速度に達することを示している。終速度に達する時間は意外に短い時間である。

したがって、雨粒の速度は全て終速度（無限時間後の速度：地上に降る雨粒の速度）と言って良いことになる。