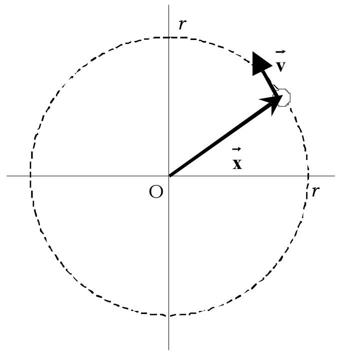
等速円運動と微積分

等速円運動



半径 r、角速度 ω で等速円運動をする質量 m の物体がある。円運動の中心を原点として、この物体の位置ベクトルを式で示すと $\vec{x}=(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)$ である。

速度ベクトルは位置ベクトルを時間 t で微分することから求められる。

したがって、速度ベクトルは $\vec{v}=\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}$ である。これを成分表示で示すと

$(v_x,\ v_y)=\left(\dfrac{dx(t)}{dt},\ \dfrac{dy(t)}{dt}\right)$ であるから、速度ベクトルは $\vec{v}=\dfrac{d\vec{x}}{dt}=(-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t)$ になる。

また、$\vec{x}=(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)$ と $\vec{v}=(-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t)$ だから、位置ベクトルと速度ベクトルの内積をとると、$\vec{x}\cdot\vec{v}=(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)\cdot(-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t)$ である。内積は各成分の積の和だから、$\vec{x}\cdot\vec{v}=0$ になる。したがって、半径方向（位置ベクトルの向き）と運動方向（速度ベクトルの向き）が直交することになる（$\vec{x}\cdot\vec{v}=|\vec{x}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=0$ であるので、それぞれのベクトルの間の角は 90 度になる）。

また速度ベクトルの大きさ（速さ）は $|\vec{v}|=\sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2+(r\omega\cos\omega t)^2}=r\omega$ となり、$v=r\omega$ である。

加速度ベクトルは速度ベクトルを時間 t で部分したものだから、

$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\left(\dfrac{d}{dt}(-r\omega\sin\omega t),\ \dfrac{d}{dt}(r\omega\cos\omega t)\right)$ より $\vec{a}=(-r\omega^2\cos\omega t,\ -r\omega^2\sin\omega t)=-\omega^2\cdot\vec{x}$ であるので、加速度ベクトルは位置ベクトルと逆向き（中心向き）で、その大きさは $a=|\vec{a}|=r\omega^2$ である。

加速度ベクトルの大きさは $|\vec{a}|=a=r\omega^2$ であり、向きは $\vec{a}=-\omega^2\cdot\vec{x}$ であるので、位置ベクトルの向きと加速度の向きは反対向き（負符号が付くから）だから、中心（原点）向きであることが分かる。

等速円運動のまとめ

質量 m [kg] の物体が半径 r [m]、速度 v [m/s] で等速円運動しているとき、

１．円運動の加速度の大きさは $a=\dfrac{v^2}{r}=r\omega^2$ で、向きは円の中心向きである。

ω は角速度（単位時間に回転する角度）を表し、 $\omega=\dfrac{v}{r}$ になる。

２．運動の法則を適用して、円運動している物体に働く力（向心力）を求める。
運動の法則 $f=ma$ に代入して、向心力の大きさは $f=\dfrac{mv^2}{r}$ である。

３．円運動している物体からみると、動いている座標系から見た運動だから、
慣性力 $f'=-ma$ が働いているように見える。
この慣性力の大きさは $f=\dfrac{mv^2}{r}$ であり、これを「遠心力」という。
力と加速度が逆向きになるので、遠心力の向きは「中心から外向き」である。

バネの単振動と微積分

バネの単振動

ばね定数が k [N/m] に質量 m [kg] の物体がつながれている。この物体に力を加えて x_0 [m] 伸ばして手を静かに離した。この後の物体の運動を考えてみる。

ばねが x [m] 伸びているとき、物体にかかる力は $f=-kx$ であるので、

物体の運動方程式 $ma=-kx$ が成立する。

したがて、$a=-\frac{k}{m}x$ になる。加速度は $a=\frac{d^2x}{dt^2}$ であるので、$\frac{d^2}{dt^2}x=-\frac{k}{m}x$ である。

このときの位置の関数 x は、2 回微分すると元の関数の形に負の数をかけた関数になることを閉めている。この条件に当てはまる関数としては、「三角関数の sin や cos 関数」が思い当たる。

時間 t のときの位置を示す関数を $x=a\sin(bt+c)$ として、定数 a、b、c を条件から決めてみよう。

$\frac{d^2}{dt^2}\{a\sin(bt+c)\}=-\frac{k}{m}\{a\sin(bt+c)\}$ より $-ab^2\sin(bt+c)=-\frac{ka}{m}\sin(bt+c)$ から、

$ab^2=\frac{ka}{m}$ だから、$b=\sqrt{\frac{k}{m}}$ になる。

初期条件（位置が x_0 、速度がゼロ）を元に考えてみる。速度は $v=\frac{dx}{dt}=ab\cos(bt+c)$ であるので、

初速度ゼロを代入して、$ab\cos(b\times 0+c)=0$ より、$c=\pm\frac{\pi}{2}$ である。また、はじめの位置が x_0 であることから、$x_0=a\sin\left(b\times 0\pm\frac{\pi}{2}\right)$ が成立するので、$a=\pm x_0$ である。したがって、$x=\pm x_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\pm\frac{\pi}{2}\right)$ だから、位置は $x=x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$ である。一方、速度は $v=\frac{dx}{dt}$ より、$v=-x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$ である。

これらより、このバネの単振動による周期（1回振動する時間）を T とすると、$2\pi=\sqrt{\frac{k}{m}}T$ だから、

単振動の周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。

このように、円運動、単振動ともに微積分とベクトルを運動方程式と組み合わせることで、同じ扱いで計算できることになる（分野ごとの公式などは不要となる）。

ばねの単振動のまとめ

質量 m [kg] の物体がばね定数 k [N/m] のばねにつながれている場合の単振動

1．単振動とは円運動を一方向からみた往復運動

2．つりあいの位置を原点とすると、位置は $x=A\sin(\omega t+\delta)$ である。

振幅 A 、角振動数 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 、初期位相 δ 、周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。