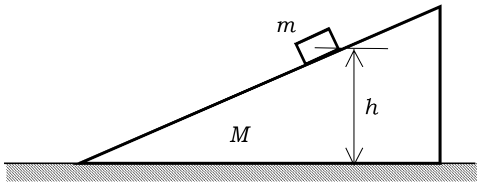
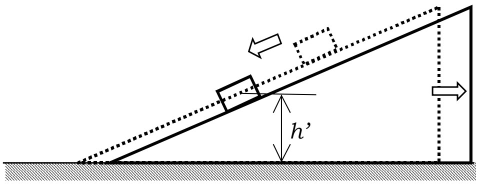
復習シリーズ　運動量とエネルギー（実践編）第３回　（　　）組　（　　）番　氏名（　　　　　　　　）



滑らかで水平な床の上に右図に示すような傾斜角 θ の台がある。台の質量は M である。この台の斜面に質量 m の小さな物体を静かに乗せた。物体を乗せた位置は床から高さ h の所であった。なお、必要なら、重力加速度は g m/s^2 とする。



1. 物体が床から h' の高さまで斜面を滑り下りたときの台の速度を V、台から見た物体の速度を v として次の問に答えなさい。

(1) 床から見た物体の速度の水平方向成分、鉛直方向成分を求めなさい。

(2) 運動量保存の法則を使って、関係式を作りなさい。

(3) 力学的エネルギー保存の法則を使って、関係式を作りなさい。

2. 斜面の下端に下りたとき、台から見た物体の速度 v、床から見た台の速度 V を求めなさい。

3. 斜面の下端に下りたとき、床から見た物体の速度を求めなさい。

復習シリーズ　運動量とエネルギー（実践編）第３回　（　　）組　（　　）番　氏名（　　　　　　　）

1. 物体が床から h' の高さまで斜面を滑り下りたときの台の速度を V（右向き）、台から見た物体の速度を v（斜面下向き）とする。また、速度の水平方向成分は右向きが正、鉛直方向成分は上向きが正とする。

(1) 「床から見た物体の速度」=「床から見た台の速度」＋「台から見た物体の速度」だから、

床から見た物体の速度の水平方向成分 $V - v\cos\theta$ ･･･(A)

床から見た物体の速度の鉛直方向成分 $-v\sin\theta$ ･･･(B)

(2) 水平方向の外力は働かないので、物体が高さ h、h' のときでは、運動量が保存する。

→ 当然、そのときの速度は床から見たものを使わなければならない。

したがって、$0 = m(V - v\cos\theta) + MV$ より、$(m+M)V - mv\cos\theta = 0$ ･･･①

(3) 摩擦がないので、力学的エネルギー保存の法則が成立する。

→ 当然、そのときの速度は床から見たものを使わなければならない。

$$mgh = mgh' + \frac{1}{2}m\left\{(V - v\cos\theta)^2 + (-v\sin\theta)^2\right\} + \frac{1}{2}MV^2 \cdots ②$$

2. ②より、$2mg(h-h') = (m+M)V^2 - 2mVv\cos\theta + mv^2$ ･･･②' が成立する。

①より、$V = \dfrac{mv\cos\theta}{m+M}$ を、②に代入して、$2mg(h-h') = \dfrac{mv^2(m\sin^2\theta + M)}{m+M}$ より、整理すると、

台から見た物体の速度は $v = \sqrt{\dfrac{2(m+M)g(h-h')}{m\sin^2\theta + M}}$ ･･･③ である。

③を①に代入して、$V = \dfrac{m\cos\theta}{m+M}\sqrt{\dfrac{2(m+M)g(h-h')}{m\sin^2\theta + M}}$ だから、これを整理すると、

床から見た台の速度は　$V = \sqrt{\dfrac{2m^2g(h-h')\cos^2\theta}{(m+M)(m\sin^2\theta + M)}}$ ･･･④ である。

3. 斜面の下端に下りたとき、$h' = 0$ になる。これを③、④に代入して求めればよい。

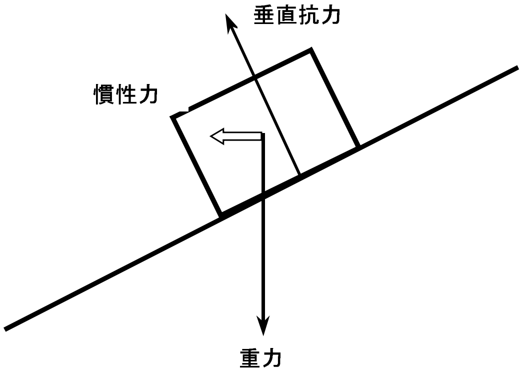
台から見た物体の速度 $v_0 = \sqrt{\dfrac{2(m+M)gh}{m\sin^2\theta + M}}$、床から見た台の速度　$V_0 = \sqrt{\dfrac{2m^2gh\cos^2\theta}{(m+M)(m\sin^2\theta + M)}}$

これらを(A)に代入して、$V_0 - v_0\cos\theta = \sqrt{\dfrac{2m^2gh\cos^2\theta}{(m+M)(m\sin^2\theta + M)}} - \sqrt{\dfrac{2(m+M)gh}{m\sin^2\theta + M}}\cos\theta$ より、

床から見た物体の速度の水平方向成分は $V_0 - v_0\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{2M^2gh\cos^2\theta}{(m+M)(m\sin^2\theta + M)}}$

床から見た物体の速度の鉛直方向成分は $-v_0\sin\theta = -\sqrt{\dfrac{2(m+M)gh\sin^2\theta}{m\sin^2\theta + M}}$ である。

［参考］　運動方程式でこれを解くとどのようになるか？　当然、同じ答えが求まるはずだが...　　挑戦してみよう！



台の運動は床から見た運動として、物体は台から見た運動として運動方程式を考える（相対運動）。床から見た台の加速度を A、台から見た物体の加速度を a としよう。

物体の運動方程式を作る

物体に働く力は、右図に示すような 重力 mg、垂直抗力 N、慣性力 mA ３つの力である。当然、動く方向、垂直な方向に力を分解して、それぞれの方向の運動方程式を作るだけのワンパターン作業だ（**運動方程式の鉄則**）。

斜面に平行な方向（斜面下向きを正）の運動方程式を作ると、$mg\sin\theta + mA\cos\theta = ma$ ･･･①

斜面に垂直な方向は釣り合うので、$N - mg\cos\theta + mA\sin\theta = 0$ ･･･②

台の運動方程式を作る

台に働く力は、物体から受ける垂直抗力 N、重力 Mg の２つの力だ。

水平方向（右向き正）の運動方程式を作ると、$N\sin\theta = MA$ ･･･③

鉛直方向は釣り合うので、床からの垂直抗力を N_0 とすると、$N_0 - Mg - N\cos\theta = 0$ ･･･④

運動方程式を解く

②、③より、$(mg\cos\theta - mA\sin\theta)\sin\theta = MA$ だから、$A = \dfrac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$ である。これを①に代入して、$mg\sin\theta + \dfrac{m^2 g\sin\theta\cos^2\theta}{M + m\sin^2\theta} = ma$ だから、物体の加速度 a を求めると、$a = \dfrac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}$ である。$h - h'$ だけ下がるので、斜面上を $\dfrac{h-h'}{\sin\theta}$ だけ滑る。等加速度運動の公式 $v^2 - {v_0}^2 = 2ax$ に代入して、$v^2 - 0^2 = 2\cdot\dfrac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}\cdot\dfrac{h-h'}{\sin\theta}$ だから、これを整理して v を求めると、

台から見た物体の速度は、$v = \sqrt{\dfrac{2(M+m)g(h-h')}{(M + m\sin^2\theta)}}$ である（当然、前ページ③に一致する）。

また、高さが $h - h'$ だけ下がる時間を t とし、等加速度運動の公式 $v = at$ に代入して、

$\sqrt{\dfrac{2(M+m)g(h-h')}{M + m\sin^2\theta}} = \dfrac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}\cdot t$ より、$t = \sqrt{\dfrac{2(M + m\sin^2\theta)(h-h')}{(M+m)g\sin^2\theta}}$ である。このとき、台も等加速度運動になるから、等加速度運動の公式 $v = v_0 + at$ より、$V = At$ だから、これに代入して

$V = \dfrac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\cdot\sqrt{\dfrac{2(M + m\sin^2\theta)(h-h')}{(M+m)g\sin^2\theta}}$ より、これを整理して求めると、

床から見た台の速度は $V = \sqrt{\dfrac{2m^2 g(h-h')\cos^2\theta}{(M + m\sin^2\theta)(M+m)}}$ である（当然、前ページ④に一致する）。

このように、正々堂々と**「運動方程式」**を使って解いても良い。あなたはどちらにしますか？