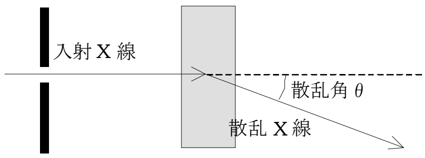
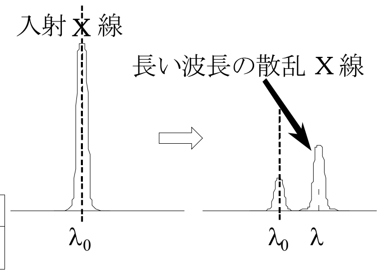
コンプトン効果（演習）　　　　　　　　　（　　）組９．１（　　）番　氏名（　　　　　　）

単一の波長のＸ線をせきぼく（炭素）に当てたとき、石墨から散乱されるＸ線の波長を測定する。石墨から散乱されるＸ線の中に照射Ｘ線の波長とは異なるＸ線が含まれることに気づいた。更に詳しく散乱Ｘ線を調べると、散乱角と波長のずれの間には相関関係があることが分かった。その実験内容の詳細を次に示す。



１　入射Ｘ線より少し長い波長の散乱Ｘ線が含まれる。

２　散乱角がゼロのときは波長のずれがないが、散乱角が大きくなるにつれ、波長の変化が大きくなる。



散乱角 [度]	0	45	90	135
波長のずれ [m]	0	0.7×10^{-12}	2.4×10^{-12}	4.1×10^{-12}

以上のような特徴が波長のずれに見つかった。下の各問に答えなさい。また、必要なら、炭素原子の質量 2.0×10^{-26} [kg]、電子の質量は 9.1×10^{-31} kg、光速は 3.0×10^{8} [m/s]、プランク定数 $h=6.6\times10^{-34}$ [Js] としなさい。

問1．Ｘ線管によって発生するＸ線の波長は単一波長ではない（いろいろな波長のＸ線を含んでいる）。加速電圧 V [V] のＸ線管から発生するＸ線の波長について説明しなさい。（ヒント：最短波長）

問2．Ｘ線管から発生するＸ線から、単一波長のＸ線を取り出す方法を述べなさい。（ヒント：ブラッグ反射）

問3．散乱Ｘ線の波長を測定する方法を述べなさい。（ヒント：ブラッグ反射）

問4．Ｘ線を波動説（Ｘ線が波である）で考える。石墨を構成している炭素原子の熱振動による運動によって、Ｘ線が反射（散乱）されるとき、石墨で反射（散乱）されるＸ線の波長はどのように変化すると考えられるか述べなさい。また、実験結果と比較して妥当性を述べなさい。（ヒント：ドップラー効果）

問5．Ｘ線を粒子説（Ｘ線が光子である）で考える。石墨を構成している炭素原子、または、電子にＸ線が衝突し、Ｘ線の波長が変化する場合、どのようにＸ線の波長が変化するか述べなさい。（ヒント：光量子説）

問6．Ｘ線が衝突しているのは、炭素原子か、その周りを回る電子か。実験結果から判定してください。

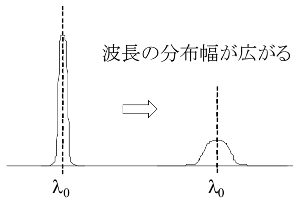
コンプトン効果（演習）解説　　　　　　　　（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　）

問1.（ヒント：最短波長）加速された電子がもつ運動エネルギーからＸ線の光子が作られるから、Ｘ線の光子のエネルギーは電子の運動エネルギーを超えることは出来ない。よって、アインシュタインの光量子説によると光子のエネルギーは $h\nu$ だから、Ｘ線の波長 λ は不等式 $\dfrac{hc}{\lambda} \leq eV$ を満たす。よって、発生するＸ線の波長は $\lambda \geq \dfrac{hc}{eV}$ になる。（最短波長は $\dfrac{hc}{eV}$ より長い波長のＸ線を発生する）

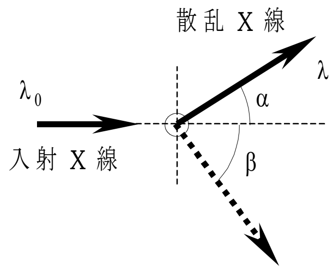
問2.（ヒント：ブラッグ反射）Ｘ線を結晶に当てたとき、特定の角度に強く反射する（ブラッグ反射）。このときの条件式は $2d\sin\theta = n\lambda$（n は整数）であり、これをブラッグの条件という。したがって、Ｘ線管から発生するＸ線を適当な結晶に当てて特定の角度に反射されるＸ線を取り出せば、単一波長のＸ線が得られる。

問3.（ヒント：ブラッグ反射）問２と同様に、散乱Ｘ線を適当な結晶に当てて反射する角度を測定すると、ブラッグの条件 $2d\sin\theta = n\lambda$（n は整数）より、散乱Ｘ線の波長が分かる。

問4.（ヒント：ドップラー効果）ドップラー効果の公式 $f = f_0 \times \dfrac{V - u_O}{V - u_S}$（$u_O$ は観測者の速度、u_S は波源の速度）を使ってドップラー効果による波長の変化を求めればよい。この場合炭素原子の熱振動による運動は特定の向きを持たず、速度も多様であるから、ドップラー効果により、振動数の変化は $\pm$ 両方のケースが起こり、また、波長のずれ多様になる。したがって、波長の変化は右のグラフのようになるはずである（この実験結果とはまったく異なる）。



問5.（ヒント：光量子説）Ｘ線を粒子（光子）と考えて、質量 m の粒子に衝突する場合を考える（当然、衝突は弾性衝突とする）。運動量保存の法則より、入射方向では $\dfrac{h}{\lambda_0} = \dfrac{h}{\lambda}\cos\alpha + mv\cos\beta$ …①、入射方向に垂直な方向では $0 = \dfrac{h}{\lambda}\sin\alpha - mv\sin\beta$ …② が成立する。また、エネルギー保存の法則より、$\dfrac{hc}{\lambda_0} = \dfrac{hc}{\lambda} + \dfrac{1}{2}mv^2$ …③ が成立する。①、②より、β を消去して、$\left(\dfrac{h}{\lambda_0} - \dfrac{h}{\lambda}\cos\alpha\right)^2 + \left(\dfrac{h}{\lambda}\sin\alpha\right)^2 = m^2v^2$ になる。これに③を代入して v を消去すると、$\left(\dfrac{h}{\lambda_0} - \dfrac{h}{\lambda}\cos\alpha\right)^2 + \left(\dfrac{h}{\lambda}\sin\alpha\right)^2 = 2m\left(\dfrac{hc}{\lambda_0} - \dfrac{hc}{\lambda}\right)$ だから、$\dfrac{(\lambda - \lambda_0)^2 + 2\lambda_0\lambda}{\lambda_0\lambda} - 2\cos\alpha = \dfrac{2mc(\lambda - \lambda_0)}{h}$ になる。ここで $\lambda - \lambda_0$ は $\lambda_0\lambda$ に比べて十分に小さいので $(\lambda - \lambda_0)^2$ は無視できる。よって、波長のずれは $\lambda - \lambda_0 = \dfrac{h}{mc}(1 - \cos\alpha)$ …④ と表される。



問6. 例えば散乱角が 90 度の場合、波長のずれが 2.4×10^{-12} [m] を問５の結果④に代入して、衝突する粒子の質量を求めると、$m = \dfrac{6.6 \times 10^{-34}}{2.4 \times 10^{-12} \cdot 3.0 \times 10^{8}} = 9.2 \times 10^{-31}$ [kg] である。 よって、衝突した粒子は炭素原子の周りを回っている「電子（質量 9.1×10^{-31} kg）」である。