

解説 X線の波長が変化の原因は原子との衝突か、電子との衝突か？

X線を石墨などの試料物質に当てる試料によりX線が散乱される。その散乱X線の波長は入射X線より波長の長いものが含まれる。また、このとき、散乱角が大きいものほど波長の変化が大きいことがわかる。このX線の波長の変化の原因を探ってみる。

ボーア博士から始まった量子論から「X線も電波や光とおなじ電磁波の仲間であり、波動性と粒子性を合わせて持つ」ことがわかっている。アインシュタイン博士の光量子説によると、「光子はそのエネルギーが $E = h\nu$ 、運動量が $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$ 」である。X線を光子と考えて、コンプトン散乱実験での物質を構成している粒子との衝突としてX線散乱を考察してみたい。

光子と衝突する粒子の質量を m [kg]で静止しているゼロとする。光子が角度 θ の方向に散乱される場合の衝突を考える。当然衝突は弾性衝突だから、エネルギーと運動量は保存する。

$$\text{エネルギー保存の法則より } h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}mv^2,$$

$$\text{運動量保存の法則より 進行方向では } \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\theta + mv \cos\alpha$$

$$\text{進行方向に垂直な方向では } 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin\theta - mv \sin\alpha$$

$$\text{また、} \nu = \frac{c}{\lambda} \text{ を使って、この3式を波長を使って表すと、} \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2}mv^2 \dots \text{①、} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos\theta + mv \cos\alpha \dots \text{②、}$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta - mv \sin\alpha \dots \text{③ とかける。①より、} v^2 = \frac{2hc}{m} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \text{ である。}$$

$$\text{②、③より } \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos\theta \right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'} \sin\theta \right)^2 = m^2 v^2 \text{ であるので、} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'} \right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos\theta = 2mhc \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} \right)$$

$$\text{したがって、} \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \text{ (実験ではこの波長のずれは僅かであるので } \lambda\lambda' = \lambda'^2 = \lambda^2 \text{ としてよい)}$$

参考 この結果から光子と衝突した粒子の質量を求めると、 $m = \frac{h}{(\lambda' - \lambda)c} (1 - \cos\theta)$ である。コンプトン散乱の

実験から得られる散乱角、波長の変化を代入すると光子と衝突した粒子の質量が求められる。この粒子の質量が電子の質量と一致することから衝突の相手が電子であることが確定した。

参考データ $\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta)$ に具体的な数値、プランク定数 $h = 6.7 \times 10^{-34}$ [Js]、光速 $c = 3.0 \times 10^8$ [m/s]を代入する。「炭素原子自体と光子が衝突」していると考えられる場合、炭素原子の場合、 $m = 2.0 \times 10^{-26}$ [kg] であるので、波長の変化は $\lambda' - \lambda = 1.1 \times 10^{-16} \times (1 - \cos\theta)$ のずれとなるはずである。したがって、180度方向(逆方向)に散乱されるX線の波長の変化は $\lambda' - \lambda = 2.2 \times 10^{-16}$ [m]になる。「炭素原子のまわりの電子と光子が衝突」していると考えられる場合、電子の場合、 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ [kg] であるので、波長の変化は $\lambda' - \lambda = 2.6 \times 10^{-12} \times (1 - \cos\theta)$ になるはずである。したがって、180度方向に散乱されるX線の波長は $\lambda' - \lambda = 5.2 \times 10^{-12}$ [m]である。

ブラッグの条件 $2d \sin\theta_B = m\lambda$ から、通常は $m=1$ だから、 $\Delta\lambda = 2d \cos\theta_B \cdot \Delta\theta_B$ だ。コンプトンの実験では $\theta_B = 6^\circ 40' = 0.11$ 、 $\Delta\theta_B = 20' = 0.0057$ だった。炭素原子自体だとすると、 $2.2 \times 10^{-16} = 2d \times 0.99 \times 0.0057$ であるから、 $d = 10^{-14}$ [m]となり、原子間の距離である 10^{-10} [m]とは違いすぎる。(原子核の大きさ程度に相当)