復習シリーズ　運動量とエネルギー　(実践編) 第3回　(　) 組 (　) 番　氏名 (　　　　　　　)

基本事項

① 定義：　運動量= [　　　] × [　　　]　　単位：　[　　　]

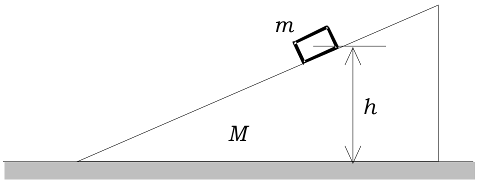
② 運動量変化はその間に受けた力積に等しい

③ 「運動量保存の法則」が成立する条件は　[　　　　　　]

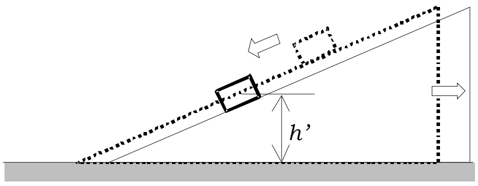
④ はねかえり係数の定義　　e ＝ [　　　　　　]

⑤ 力学的エネルギー　→　[　　　　] 、[　　　　] 、[　　　　]

⑥ 「力学的エネルギー保存の法則」が成立する条件は　[　　　　　　]



滑らかで水平な床の上に右図に示すような傾斜角 θ の台がある。台の質量は M である。この台の斜面に質量 m の小さな物体を静かに乗せた。物体を乗せた位置は床から高さ h の所であった。なお、必要なら、重力加速度は g m/s^2 とする。



1. 物体が床から h' の高さまで斜面を滑り下りたときの台の速度を V、台から見た物体の速度を v として次の問に答えなさい。

   (1) 床から見た物体の速度の水平方向成分、鉛直方向成分を求めなさい。

   (2) 運動量保存の法則を使って、関係式を作りなさい。

   (3) 力学的エネルギー保存の法則を使って、関係式を作りなさい。

2. 斜面の下端に下りたとき、台から見た物体の速度 v、床から見た台の速度 V を求めなさい。

3. 斜面の下端に下りたとき、床から見た物体の速度を求めなさい。

復習シリーズ　運動量とエネルギー（実践編）第３回　運動量保存則、エネルギー保存則を使って解く

※ このレベルの問題が出来れば、入試レベルで完成といえるレベル。この問題が解けることを目標にすると良い。

1. 物体が床から h' の高さまで斜面を滑り下りたときの台の速度を V（右向き）、台から見た物体の速度を v（斜面下向き）とする。また、速度の水平方向成分は右向きが正、鉛直方向成分は上向きが正とする。

(1) 「床から見た物体の速度」=「床から見た台の速度」＋「台から見た物体の速度」だから、

床から見た物体の速度の水平方向成分 $V - v\cos\theta$ ･･･(A)

床から見た物体の速度の鉛直方向成分 $-v\sin\theta$ ･･･(B)

(2) 水平方向の外力は働かないので、物体が高さ h、h' のときでは、運動量が保存する。

→ 当然、そのときの速度は床から見たものを使わなければならない。

したがって、$0 = m(V - v\cos\theta) + MV$ より、$(m+M)V - mv\cos\theta = 0$ ･･･①

(3) 摩擦がないので、力学的エネルギー保存の法則が成立する。

→ 当然、そのときの速度は床から見たものを使わなければならない。

$$mgh = mgh' + \frac{1}{2}m\left\{(V - v\cos\theta)^2 + (-v\sin\theta)^2\right\} + \frac{1}{2}MV^2 \text{･･･②}$$

2. ② より、$2mg(h-h') = (m+M)V^2 - 2mVv\cos\theta + mv^2$ ･･･②’　が成立する。

より、$V = \dfrac{mv\cos\theta}{m+M}$ を、②に代入して、$2mg(h-h') = \dfrac{mv^2(m\sin^2\theta + M)}{m+M}$ より、整理すると、

台から見た物体の速度は $v = \sqrt{\dfrac{2(m+M)g(h-h')}{m\sin^2\theta + M}}$ ･･･③ である。

を①に代入して、$V = \dfrac{m\cos\theta}{m+M}\sqrt{\dfrac{2(m+M)g(h-h')}{m\sin^2\theta + M}}$ だから、これを整理すると、

床から見た台の速度は　$V = \sqrt{\dfrac{2m^2 g(h-h')\cos^2\theta}{(m+M)(m\sin^2\theta + M)}}$ ･･･④ である。

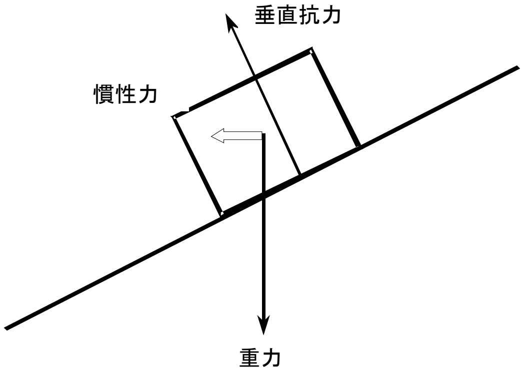
3. 斜面の下端に下りたとき、$h' = 0$ になる。これを③、④に代入して求めればよい。

台から見た物体の速度 $v_0 = \sqrt{\dfrac{2(m+M)gh}{m\sin^2\theta + M}}$、床から見た台の速度　$V_0 = \sqrt{\dfrac{2m^2 gh\cos^2\theta}{(m+M)(m\sin^2\theta + M)}}$

これらを(A)に代入して、$V_0 - v_0\cos\theta = \sqrt{\dfrac{2m^2 gh\cos^2\theta}{(m+M)(m\sin^2\theta + M)}} - \sqrt{\dfrac{2(m+M)gh}{m\sin^2\theta + M}}\cos\theta$ より、

床から見た物体の速度の水平方向成分は $V_0 - v_0\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{2M^2 gh\cos^2\theta}{(m+M)(m\sin^2\theta + M)}}$

床から見た物体の速度の鉛直方向成分は $-v_0\sin\theta = -\sqrt{\dfrac{2(m+M)gh\sin^2\theta}{m\sin^2\theta + M}}$ である。



［参考］運動方程式でこれを解くとどのようになるか？
当然、同じ答えが求まるはずだが．．．

台の運動は床から見た運動として、物体は台から見た運動として運動方程式を考える。床から見た台の加速度をA、台から見た物体の加速度をaとしよう。

物体の運動方程式を作る

物体に働く力は、右図に示すような 重力 mg 、垂直抗力 N 、慣性力 mA の３つの力である。

斜面に平行な方向（斜面下向きを正）の運動方程式を作ると、$mg\sin\theta + mA\cos\theta = ma$・・・①

斜面に垂直な方向は釣り合うので、

$N - mg\cos\theta + mA\sin\theta = 0$・・・②

台の運動方程式を作る

台に働く力は、物体から受ける垂直抗力 N 、重力 Mg の２つの力だ。

水平方向（右向き正）の運動方程式を作ると、$N\sin\theta = MA$・・・③

鉛直方向は釣り合うので、床からの垂直抗力を N_0 とすると、$N_0 - Mg - N\cos\theta = 0$・・・④

運動方程式を解く

②、③より、$(mg\cos\theta - mA\sin\theta)\sin\theta = MA$ だから、$A = \dfrac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$ である。これを①に代入して、

$mg\sin\theta + \dfrac{m^2 g\sin\theta\cos^2\theta}{M + m\sin^2\theta} = ma$ だから、物体の加速度aを求めると、$a = \dfrac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}$ である。高さが $h - h'$ だけ下がるので、斜面上を $\dfrac{h - h'}{\sin\theta}$ だけ滑る。等加速度運動の公式より、

$v^2 - 0^2 = 2\cdot\dfrac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}\cdot\dfrac{h-h'}{\sin\theta}$ だから、台から見た物体の速度は、$v = \sqrt{\dfrac{2(M+m)g(h-h')}{M + m\sin^2\theta}}$ である（当然、前ページ③に一致する）。

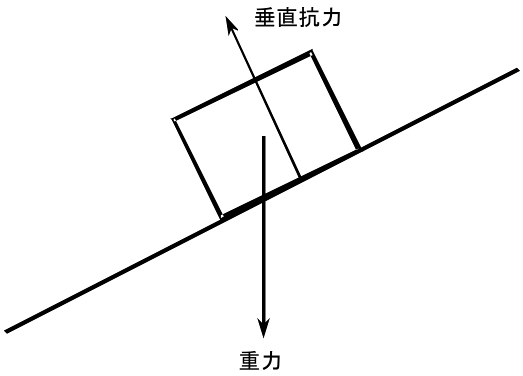
滑り降りる時間を考えてみよう。物体の高さが $h - h'$ だけ下がる時間をtとし、等加速度運動の公式 $v = at$ に代入して、$\sqrt{\dfrac{2(M+m)g(h-h')}{M + m\sin^2\theta}} = \dfrac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}\cdot t$ だから、物体が高さhからh'に下りる時間は

$t = \sqrt{\dfrac{2(M + m\sin^2\theta)(h-h')}{(M+m)g\sin^2\theta}}$ である。

台も等加速度運動するので、$V = At$ より、$V = At = \dfrac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\cdot\sqrt{\dfrac{2(M + m\sin^2\theta)(h-h')}{(M+m)g\sin^2\theta}}$ より、床から見た台の速度は $V = \sqrt{\dfrac{2m^2 g(h-h')\cos^2\theta}{(M+m)(M + m\sin^2\theta)}}$ （当然、前ページ④に一致する）。

※　斜面台から見た相対運動として解いた例であるが、静止系からみた（床から見た）運動として解くことも出来る。この場合は、上記の解答に出てくる慣性力は出てこないことに注意する。

復習シリーズ　運動量とエネルギー（実践編）第３回　静止系での運動方程式を使って解く方法
［静止系での運動方程式を使う］当然、同じ答えが求まるはずだが．．．



床から見た台の加速度を $\vec{A}=(A_x, A_y)$、床から見た物体の加速度を $\vec{a}=(a_x, a_y)$ としよう。どちらの運動も、水平方向、鉛直方向の２つの方向に分けて作成する。

物体の運動方程式を作る

物体に働く力は、右図に示すような 重力 mg 、垂直抗力 N の力である。

水平方向の運動方程式（右向きを正）として、
$-N\sin\theta = ma_x$ ・・・①

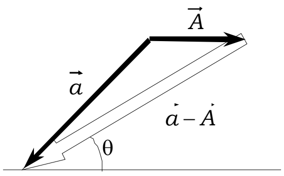
鉛直方向の運動方程式（上向きを正）として、$N\cos\theta - mg = ma_y$ ・・・②

台の運動方程式を作る

水平方向（右向き正）の運動方程式を作ると、$N\sin\theta = MA_x$ ・・・③
鉛直方向は加速度ゼロだから、$A_y = 0$ ・・・④

運動方程式を解く

①、②、③、④において、未知数が a_x 、a_y 、A_x 、A_y 、N の４つが未知数でこれでは解けない。もう一つの関係式はどのようにして導くのか？　→、物体が斜面を滑ることは、「斜面から見た物体の速度が斜め下向きの角度がθであること」に気づけばよい（右図）。



これより、$\vec{a}-\vec{A}=(a_x,\ a_y)-(A_x,\ A_y)=(a_x - A_x,\ a_y - A_y)$ だから、

$\tan\theta = \dfrac{a_y - A_y}{a_x - A_x}$ ・・・⑤ が成立する。これで方程式が解けることになる。

①より、$a_x = -\dfrac{N\sin\theta}{m}$ 、②より、$a_y = \dfrac{N\cos\theta - mg}{m}$ 、③より、$A_x = \dfrac{N\sin\theta}{M}$ 、④、⑤より、$a_x\tan\theta - A_x\tan\theta = a_y$ だから、以上を代入して、

$\left(-\dfrac{N\sin\theta}{m}\right)\tan\theta - \left(\dfrac{N\sin\theta}{M}\right)\tan\theta = \left(\dfrac{N\cos\theta - mg}{m}\right)$ より、垂直抗力は

$N = \dfrac{Mmg}{(m+M)\sin\theta\tan\theta + M\cos\theta} = \dfrac{Mmg\cos\theta}{m\sin^2\theta + M}$ である。したがって、 $a_x = -\dfrac{Mg\cos\theta\sin\theta}{m\sin^2\theta + M}$ 、

$a_y = \dfrac{Mg\cos^2\theta}{m\sin^2\theta + M} - g = -\dfrac{(M+m)g\sin^2\theta}{m\sin^2\theta + M}$ 、 $A_x = \dfrac{mg\cos\theta\sin\theta}{m\sin^2\theta + M}$ である。

台から見た物体の加速度は $\vec{a}-\vec{A}=(a_x - A_x,\ a_y - A_y)$ に代入して、

$\vec{a}-\vec{A} = \left(-\dfrac{(M+m)g\cos\theta\sin\theta}{m\sin^2\theta + M}, -\dfrac{(M+m)g\sin^2\theta}{m\sin^2\theta + M}\right)$ である。 したがって、加速度の大きさは斜面下向きに

$a = \dfrac{(M+m)g\sin\theta}{m\sin^2\theta + M}$ である。これより、等加速度運動の公式を用いて計算する過程は、相対運動系での解法と同一になるので省略する。