定常波の理論的考察 （波の方程式を用いての計算）

［波の方程式］

振幅A、波長 λ 、周期T、x軸正の向きに進行する波　→　$y_1 =$

振幅A、波長 λ 、周期T、x軸負の向きに進行する波　→　$y_2 =$

進行方向が逆向きの同じ波が重なると、**「定常波」**という進行しない「不思議な波」が出来ることが分かっている。

「波の重ね合わせの原理」 波が重なるときは、合成波の変位は、それぞれの波の変位の和になる。

合成波の波の式　→「波の重ね合わせの原理」 $y = y_1 + y_2$ であるので、これを計算してみよう。

［計算］

$y = y_1 + y_2 =$　　　　　　　　　　　　　　……(A)

二つの三角関数の合成をする。 → **「三角関数の加法定理」 または 「和積変換公式」**

加法定理　$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ ・・・・・①　$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ ・・・・・②

①＋②より、 $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

$\alpha = A+B$ 、 $\beta = A-B$ とすると

$\therefore\ \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$　［いわゆる**「三角関数の和積変換公式」**！］

和積変換公式を合成波の変位の式に適用すると

$y = y_1 + y_2 =$　　　　　　　　　　　　　　・・・・・(B)

ある位置では時間tにかかわらず常に変位がゼロ(振動がないところ)がある！

その位置は　→　定常波の「節」と呼ばれる位置

別の位置では振幅が二倍の振動が起きる(振動が激しいところ)がある！

その位置は　→　定常波の「腹」と呼ばれる位置

上記のように、二つの極端な違いが見られる場所が存在することになる。

［結論］

振幅、波長、周期が同じで進行方向が逆の波が重なると、波長の半分毎の間隔で常に変位がゼロ(動かない)ところが出来る。この場所を「節(ふし)」という。この「節」と「節」の間隔は波長の半分である。一方、「節」と「節」の間には、激しく振動する「腹(はら)」と呼ばれる位置がある。

1. **振動が常にゼロ(動かない)位置を「節(ふし)」という。**
2. **節−節の間には振動の激しい「腹(はら)」が存在する。**
3. **「節−節」、「腹−腹」の間隔はどちらも波長の半分で等間隔に並ぶ。**

定常波の理論的考察（波の方程式を用いての計算）

［波の方程式］

振幅 A、波長 λ、周期 T、x軸正の向きに進行する波　$y_1 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

振幅 A、波長 λ、周期 T、x軸負の向きに進行する波　$y_2 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$

上に示す、進行方向が逆向きの同じ波が重なると、**「定常波」**という進行しない「不思議な波」が出来ることが分かっている。

波が重なるときは、合成波の変位は、それぞれの波の変位の和になることが分かっている。いわゆる**「波の重ね合わせの原理」**である。

したがって、合成波の変位の式は $y = y_1 + y_2$ であるので、これを計算してみよう。

［計算］

$$y = y_1 + y_2 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad \cdots\cdots\text{(A)}$$

二つの三角関数の合成をするために、**三角関数の加法定理**を使う。

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \cdots\cdots ①$　$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B \cdots\cdots ②$

①＋②より、　$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

$\alpha = A+B$ 、 $\beta = A-B$ とすると

$\therefore\ \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　［いわゆる**三角関数の和積変換公式！**］

和積変換公式を合成波の変位の式に適用すると

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) = 2\sin 2\pi\frac{t}{T}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} \quad \cdots\cdots\text{(B)}$$

この変位の式はある位置では時間 t にかかわらず常に変位がゼロ(振動がないところ)になることを示している。その位置は $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0$ すなわち $x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}$ ｛n は整数｝である。

また、$\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm 1$ すなわち、$x = \frac{n\lambda}{2}$ ｛n は整数｝では、振幅が二倍の振動が起きる(振動が激しいところ)。

上記のように、二つの極端な違いが見られる場所が存在することになる。

［結論］

振幅、波長、周期が同じで進行方向が逆の波が重なると、波長の半分毎の間隔で常に変位がゼロ(動かない)ところが出来る。この場所を「節(ふし)」という。この「節」と「節」の間隔は波長の半分である。一方、「節」と「節」の間には、激しく振動する「腹(はら)」と呼ばれる位置がある。

1. **振動が常にゼロ(動かない)位置を「節(ふし)」という。**
2. **節−節の間には振動の激しい「腹(はら)」が存在する。**
3. **「節−節」、「腹−腹」の間隔はどちらも波長の半分で等間隔に並ぶ。**