物理プリント　屈折の法則（スネルの法則）　フェルマーの挑戦

屈折の法則（スネルの法則）　$n_{12}=\dfrac{\sin i}{\sin r}=\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ を導くことへの挑戦

フェルマーによる考え　→「光は最短時間になる経路を通る」

証明への過程

(1)　x 軸 を媒質の境界面とする。

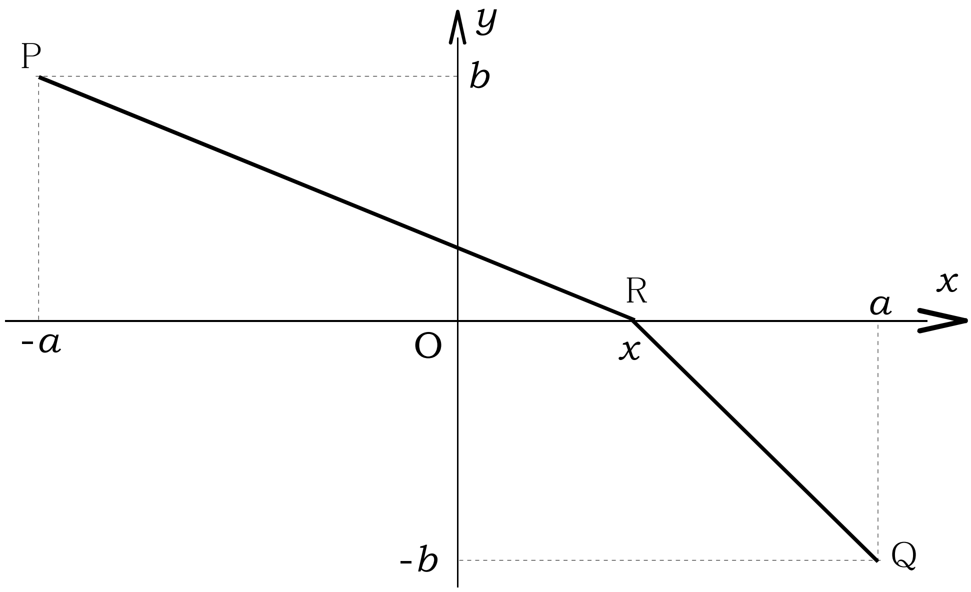
(2)　波の伝播速度を $y>0$ で　v_1　、$y<0$ で　v_2　(ただし、　$v_1>v_2$　) とする。

(3)　点 P ($-a,b$) から x 軸上の点 R (x,0)を通り点 Q ($a,-b$) へ波が伝わる。

(4)　xを変化させ、点 p から点 Q までの伝播時間が最小となるを x 求める。

(5)　伝播時間が最小となるを x が最小となるとき、屈折の法則を満たすこと示す。

証明



ピタゴラスの定理より、　$\mathrm{PR}=\sqrt{(a+x)^2+b^2}$　、　$\mathrm{RQ}=\sqrt{(a-x)^2+b^2}$　である。これより、波が点 P から点 Q への伝播時間は　$t=\dfrac{\mathrm{PR}}{v_1}+\dfrac{\mathrm{RQ}}{v_2}=\dfrac{\sqrt{(a+x)^2+b^2}}{v_1}+\dfrac{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}{v_2}$　である。

伝播時間 tを変数 xで微分して、伝播時間最小の条件を求めてみよう。

①を xで微分して　$\dfrac{dT}{dx}=\dfrac{(a+x)}{v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}-\dfrac{(a-x)}{v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$　･･･①だから、通分してやると

$$\frac{dT}{dx}=\frac{(a+x)v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}-(a-x)v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}{v_1 v_2\sqrt{(a+x)^2+b^2}\sqrt{(a-x)^2+b^2}}\quad\cdots②$$

$a,b>0$　として一般性は失われないので、　$a,b>0$　とすると、分母は常に正になる。

よって、微分係数　$\dfrac{dT}{dx}$　の符号は分子　$(a+x)v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}-(a-x)v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}$

できまる。伝播時間が最短になるのだから微分係数がゼロになる。

$(a+x)v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}-(a-x)v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}=0$ の解を $x=x_0$ とすると

微分係数ゼロの条件は $(a+x_0)v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}-(a-x_0)v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}=0$ である。

整理して $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{\dfrac{(a+x_0)}{\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}}}{\dfrac{(a-x_0)}{\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}}}$ になる。これは屈折の法則 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{\sin i}{\sin r}$ そのものである。

ただし、この条件は、微分係数ゼロだから最小のときとは限らない（最大かもしれない）。

次に、 $x=x_0$ のとき、伝播時間 T が最小値となることを確かめてみよう。

①を変形すると $\dfrac{dT}{dx}=\dfrac{(a+x)}{v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}+\dfrac{(x-a)}{v_2\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$ ・・・③ になる。

右辺の両項は $f(X)=\dfrac{X}{C\sqrt{X^2+B^2}}$ の形になる。 $x<0$ のとき $f(X)=-\dfrac{1}{C\sqrt{1+\left(\dfrac{B}{X}\right)^2}}$ 、

$x>0$ のとき $f(X)=0$ 、 $x>0$ のとき $f(X)=\dfrac{1}{C\sqrt{1+\left(\dfrac{B}{X}\right)^2}}$ と書き換えられる。

$C>0$ だから、この関数は単調増加関数であることが分かる。単調増加関数の和の関数は、単調増加関数だから、微分係数 $\dfrac{dT}{dx}=\dfrac{(a+x)}{v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}+\dfrac{(x-a)}{v_2\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$ は単調増加関数である。 $x=x_0$ で微分係数はゼロだから、

$x<x_0$ で負、 $x>x_0$ で正である。

右の増減表より、 $x=x_0$ で伝播時間 T が最小値をとることが確認できた。

x	～	x_0	～
T'	−	0	+
T	↘	最小値	↗

以上より、フェルマーの考え「光は最短時間になる経路を通る」から、屈折の法則（スネルの法則） $n_{12}=\dfrac{\sin i}{\sin r}=\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ を導くことができた。（志）