

微積分法を用いた物理学 ～ コンデンサーに交流を加えるとどうなるか？ ～

電気容量が C [F] のコンデンサーに、電圧の最大値 V_0 [V]、周波数 f [Hz] の交流電圧を加えたらどのようなことがおこるのか？ これを考えてみよう。

直交電圧を加えた場合、その瞬間には大きな電流が流れるが、しばらくすると、充電が完了すると、電流は流れなくなってしまう。電流はコンデンサーの充電過程にのみ流れる。

交流の場合電圧は時間と共に変化する。時間 t の関数で示すと次の式で示すことができる。

$$\text{コンデンサーに加えた交流電圧} \quad V = V_0 \sin 2\pi f t \quad \cdots \textcircled{1}$$

コンデンサーにこの交流を加えたとき、コンデンサーの電圧がこの電圧値になる。したがって、コンデンサーに蓄えられている電気量は公式 $Q = CV$ より、 $Q = CV_0 \cdot \sin 2\pi f t \quad \cdots \textcircled{2}$ のように変化していることがわかる。

蓄えられている電気量が増加するということは、コンデンサーに電荷が流れ込んだり（電気量が増加）、コンデンサーから電荷が流れ出たり（電気量が減少）していることを意味する。

これは、コンデンサーに電流が流れていることを示している。そこで、この電流を微積分法を用いて表してみることにしよう。

微分法を使った電流の表現

コンデンサーに電流 I [A] が短い時間 Δt [s] 流れ込み、コンデンサーの電気量は ΔQ [C] 増加したとしよう。これを電流の定義に基づいて式に作ると、 $\Delta Q = I \cdot \Delta t$ の関係式ができる。

よって、 $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I$ になる。 Δt を無限に短くしてゆくと $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$ であるので、「コンデンサーに蓄えられている電気量の時間微分」が「コンデンサーに流れ込む電流」に等しい。

よって、コンデンサーに流れる電流は②を微分すれば求まることを示している。よって、コンデンサーに流れる電流は $I = 2\pi f C V_0 \cdot \cos 2\pi f t$ と表すことができる。

$$Z_c = \frac{1}{2\pi f C} \text{ とすれば、電流は } I = \frac{V_0}{Z_c} \cdot \sin\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ と書き表すことができる。}$$

コンデンサーに交流電圧を加えたとき

$$\text{加えた電圧} \quad V = V_0 \sin 2\pi f t$$

$$\text{流れる電流} \quad I = \frac{V_0}{Z_c} \cdot \sin\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ただし、} \quad Z_c = \frac{1}{2\pi f C}$$

まとめ

コンデンサーの交流に対する抵抗の働き（「容量リアクタンス」という）は $Z_c = \frac{1}{2\pi f C}$ である。

コンデンサーの電流の最大値と、コンデンサーの電圧の最大値はオームの法則に従う。

コンデンサーに加えた電圧の位相に対しコンデンサーを流れる電流の位相は $\frac{\pi}{2}$ 進む。

微積分法を用いた物理学 ～ コンデンサーに交流を加えるとどうなるか？ ～ 問題

現実にある交流を使って計算してみよう。家庭用の電気は、実効値 100 ボルト、60 ヘルツの交流が供給されている。これにコンデンサーをつないで流れる電流について考えてみる。

練習問題

関西では 100 ボルト(実効値)の家庭用の交流(60 ヘルツ)が関西電力から供給されている。この家庭用電気を電気容量 5.0 マイコファラドのコンデンサーを接続した。

※ 60 ヘルツ、100 ボルトの交流は、 $2\pi f = 120\pi$ だから $V = 100\sqrt{2}\sin 120\pi t$ である。

正弦波交流の場合、[電圧の最大値] = [電圧の実効値] $\times \sqrt{2}$ である。

電流も $I = I_0 \sin(2\pi f t + \delta)$ などと表し、電圧と同様に、最大値、実効値が存在する。

(1) このとき、このコンデンサーに流れる交流電流を式で示しなさい。

(2) 電流の実効値を求めなさい。

(3) このコンデンサーに電流が流れるがコンデンサーから発熱はほとんど無い。なぜ発熱しないのか説明しなさい。 [消費電力] = [電圧] \times [電流] だから消費電力分の熱が...

微積分法を用いた物理学 ～ コンデンサーに交流を加えるとどうなるか？ ～ 問題
練習問題

(1) このとき、このコンデンサーに流れる交流電流を式で示しなさい。

60 ヘルツ、100 ボルトの交流は、 $2\pi f = 120\pi$ だから $V = 100\sqrt{2}\sin 120\pi t$ である。

また、このときにつないだコンデンサーは 5.0 [μF] より、容量リアクタンスは $Z_c = \frac{1}{2\pi f C}$ だ

から、 $Z_c = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 60 \times 5.0 \times 10^{-6}} = 530.78 \dots$ [Ω] である。よって、コンデンサーに流れる電

流は $I = \frac{(100 \times 1.41)}{530} \sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0.266 \sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ と表すことができる。

(2) 電流の実効値を求めなさい。

(1) より電流の最大値が $0.266 \dots$ [A] になるので、電流の実効値は $0.188 \dots$ [A] である。

有効数字は2桁だから、電流の実効値は 0.19 [A] である。

(3) このコンデンサーに電流が流れるがコンデンサーから発熱はほとんど無い。なぜ発熱しないのか説明しなさい。 [消費電力] = [電圧] × [電流] だから消費電力分の熱が...

直流の場合の公式 (中学校で習った) によると、[消費電力] = [電圧] × [電流] だから消費電力分 19 [W] の熱が出そうなものだが。なぜ熱がでないのか？

→ その理由は、物理Ⅱの教科書の105ページに詳しく書かれている。

実際にどのようなになっているかを計算して見よう。

C [F] のコンデンサーに交流 $V = V_0 \sin 2\pi f t$ [V] を加えたときに流れる電流は

$I = I_0 \sin\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right)$ [A] (ただし、 $I_0 = 2\pi f C V_0$) である。

ここで、この電流による消費電力を [消費電力] = [電圧] × [電流] を使って求めると、消費

電力は $P = V_0 \cdot I_0 \cdot \sin(2\pi f t) \cdot \sin\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) = V_0 \cdot I_0 \cdot \sin(2\pi f t) \cdot \cos(2\pi f t)$ である。

これを半角公式を使って整理すると、消費電力は $P = \left(\frac{V_0 \cdot I_0}{2}\right) \cdot \sin 4\pi f t$ である。

この消費電力の式を見てどう思うか？ 消費電力がプラスになったりマイナスになったりするけれど、結果としては「平均でプラスマイナスゼロになっている！」ことを示しているではありませんか！ 熱が出ないのは当然です。電流が流れても「消費電力がゼロ」なんですからね。

不思議ですが、電流が流れても消費電力がゼロなんです。電圧の加わる向きに電流が流れると消費電力が正、逆向きに流れると消費電力が負になるのです。

電圧の向きと逆向きに電流が流れるなんてと思えるのですが、電圧と電流のグラフをじっくり見てください。逆向きに流れているときがあるでしょう！

教訓 「先入観によって判断すると失敗します」

コンデンサーやコイルは電流が流れても平均すれば、電力は消費しないと覚えておくと良い！