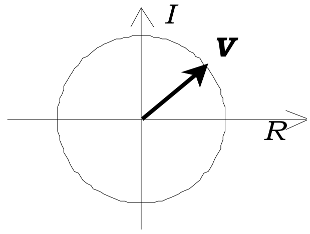
交流回路（番外編）　　　　　　　　　　　　　　　　（　）組（　）番　氏名（　　　　　　）

複素インピーダンス理論（参考）

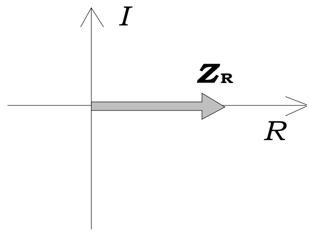


電圧、電流、インピーダンスを複素数として扱い、体系化した理論

交流電圧: $V = V_0(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ と複素数で表し、右図のように複素平面上で回転する点を交流とする。

これを、$\cos\omega t + i\sin\omega t = e^{i\omega t}$ とオイラーにより極形式で定義できる。

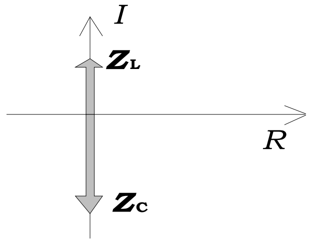
したがって、交流は$V = V_0 e^{i\omega t}$ と定義でき、複素平面上では、交流電圧、交流電流は原点を中心とした等速円運動運動するの複素数と考える。現実の交流電圧は実数軸成分が観測される。



抵抗 抵抗の複素インピーダンスは　$Z_R = R + 0i = R(\cos 0 + i\sin 0) = Re^0$ と表す（複素平面で示すと右図）。抵抗は実数成分のみを持つデバイスである。

コイル　コイルは、自己誘導の定義式 $V = (-)L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ より、$V_0 e^{i\omega t} = L\dfrac{dI}{dt}$ だから、$\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{V_0}{L}e^{i\omega t}$ より、積分すると、$I = \dfrac{V_0}{i\omega L}e^{i\omega t} = \dfrac{V_0}{\omega L}e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$ である。

コイルの複素インピーダンス（複素抵抗成分）は $Z_L = \dfrac{V}{I} = i\omega L = \omega L e^{\frac{\pi}{2}i}$ と表すことができる（複素平面で示すと右図）。



普通に書けば $Z_L = \omega L e^{\frac{\pi}{2}i} = \omega L\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right\} = 0 + i\omega L$ であるので、虚数成分のみで、実数成分を持たないデバイスである。

コンデンサー　コンデンサーの場合は、$Q = CV$、$\dfrac{dQ}{dt} = I$ より、$I = \left(CV_0 e^{i\omega t}\right)' = i\omega CV_0 e^{i\omega t} = \omega CV_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$ であるから、コンデンサーの複素インピーダンス（複素抵抗成分）は $Z_C = \dfrac{V}{I} = \dfrac{1}{i\omega C} = \dfrac{1}{\omega C}e^{-\frac{\pi}{2}i}$ と表すことができる（複素平面で示すと右図）。普通に書けば $Z_C = 0 + \dfrac{1}{i\omega C} = \dfrac{1}{\omega C}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\} = \dfrac{1}{\omega C}e^{-\frac{\pi}{2}i}$ である。これも虚数成分のみで実数成分を持たないデバイスである。

複素インピーダンス理論

これらデバイスの複素インピーダンス（複素抵抗成分）について、拡張されたオームの法則である「複素オームの法則　$V = IZ$」が成立するのでそれに適用するとすべて片づく。なお、実際に我々が見るのは、この複素空間のうち、実空間の値（実数成分）だから、実数部分の電流、電圧が現実に見える（観測できる）ものになる。次にその例を示すと、

抵抗の場合　抵抗に流れる電流は、$I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V_0 e^{i\omega t}}{Re^0} = \dfrac{V_0}{R}e^{i\omega t} = \dfrac{V_0}{R}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ だ。実際に見えるのは、実空間の電流だから、$I_R = \dfrac{V_0\cos\omega t}{R}$ であり、位相ずれがないことを示している（上の結果と一致している）。

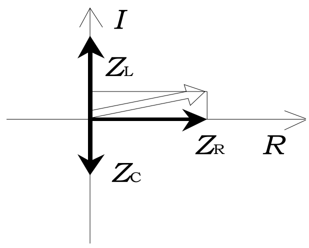
コイルの場合　コイルに流れる電流は、$I=\frac{V}{Z}=\frac{V_0 e^{i\omega t}}{\omega L e^{\frac{\pi}{2}i}}=V_0 e^{i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{V_0}{\omega L}\left\{\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ だ。

実空間の電流が答えだから、$I_L=\frac{V_0}{\omega L}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$ である。リアクタンスが ωL であり、電流の位相が $\frac{\pi}{2}$ 遅れることを示している。

コンデンサの場合　同様にして、コンデンサーに流れる電流は、$I=\frac{V}{Z}=\frac{V_0 e^{i\omega t}}{(1/\omega C)e^{-\frac{\pi}{2}i}}=\omega C V_0 e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}$ だから、

$I=\omega C V_0\left\{\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ になる。実数空間の電流が答えだから、$I_C=\omega C V_0\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ である。リアクタンスが $\frac{1}{\omega C}$ であり、電流の位相は、電圧に比べて $\frac{\pi}{2}$ 進むことを示している。

抵抗、コイル、コンデンサ直列の場合　直列だから、合成複素インピーダンス（複素抵抗成分）は $Z=Z_R+Z_L+Z_C$ より、$Z=(R+0i)+(0+i\omega L)+\left(0+\frac{1}{i\omega C}\right)=R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{i\delta}$ 但し $\tan\delta=\frac{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{R}$ である（複素平面で見ると、インピーダンスが絶対値（ベクトルの長さ）、位相のずれ δ が偏角に相当していることが分かる）。回路に流れる電流は、$I=\frac{V}{Z}$ より、$I=\frac{V}{Z}=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}e^{i(\omega t-\delta)}$ だから、



$I=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\{\cos(\omega t-\delta)+i\sin(\omega t-\delta)\}$ になる。実際の電流は、

実空間の電流であるので、$I=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cos(\omega t-\delta)$ である。位相のずれは δ 　但し、

$\tan\delta=\frac{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{R}$ 遅れる。

抵抗、コイル、コンデンサ並列の場合　並列の複素合成インピーダンスは、$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_R}+\frac{1}{Z_L}+\frac{1}{Z_C}$ だから、

$\frac{1}{Z}=\frac{1}{R}+\frac{1}{\omega L e^{\frac{\pi}{2}i}}+\frac{1}{(1/\omega C)e^{-\frac{\pi}{2}i}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{\omega L}e^{-\frac{\pi}{2}i}+\omega C e^{\frac{\pi}{2}i}=\frac{1}{R}+i\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$ であるので、合成インピーダンスは $Z=\frac{1}{\frac{1}{R}+i\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}}\cdot e^{i\delta}$ ただし、$\tan\delta=R\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)$ である。したがって、電流は、$I=\frac{V}{Z}=V_0 e^{i\omega t}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}\cdot e^{-i\delta}=V_0\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}e^{i(\omega t-\delta)}$ である。実数部分が答えだから、$I=V_0\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}\cos(\omega t-\delta)$ である。