微分方程式入門講座

～数学からみた物理学～

兵庫県立神戸高等学校
高田　広志

PDF 文書
Ver.0.01　2002.12.26 (現在の PDF 文書は 12 ページ、107kB)
Ver.0.10　2003.01.06 (現在の PDF 文書は 18 ページ、132kB)
Ver.0.20　2003.01.07 (現在の PDF 文書は 32 ページ、213kB)
Ver.0.30　2003.01.10 (現在の PDF 文書は 34 ページ、219kB)

Ver.0.40　2003.03.27 (現在の PDF 文書は 37 ページ、240kB)
Ver.0.40　2003.04.05 (現在の PDF 文書は 37 ページ、240kB)
Ver.0.50　2003.04.06 (現在の PDF 文書は 42 ページ、271kB)

PDF ソース
Ver.0.20　2003.01.07 (PDF ソースリスト 43 ページ、124kB)
Ver.0.30　2003.01.10 (PDF ソースリスト 45 ページ、127kB)

目 次

1 はじめに

一般の物体の運動において、高校の物理 で学習した等加速度運動だけで表されるような単純な運動ではない。摩擦力、空気抵抗など、その他の要素が加わるため、運動方程式は複雑になる。運動方程式そのものは簡単に作ることが出来る。しかし、その運動方程式を高校レベルの数学だけでは出来なくなる。これは高校で習った数学の知識が運動方程式を解くために必要な数学のレベルに達していないためである。高校の数学のレベルを超えるけれども、微分方程式を解くために必要な数学 (微積分学) を学習しさえすれば、このような運動方程式でも解けるようになる。現実の複雑な運動についても、運動方程式を作り、その運動方程式を微積分を駆使して解くことによって実際の運動を詳しく解析することが出来るようになる。また、コンピュータを利用してより複雑な微分方程式を計算することもできる。

数学と物理は表裏一体の学問である。数学の力が豊かになるにつれて、物理の理解度が深まり、また、物理の知識が数学のより深い理解につながることが多い。

この講義では、物理学の理解を深めるとともに、数学のレベルアップを図ることを目的として、物理学の立場から、勝手気ままに数学の発展分野（微積分学の拡張）を進めてゆく。

なお、このような数学と物理の融合された学習は、旧課程の高校生が学んでいたことを忘れてはならない。現行の学習指導要領の改訂は小中学校の学力低下だけでなく、高校、大学にまで及んでしまっている。昔の同世代の人たちが学んでいた、この学習内容が理解できないはずがない。

数学の教科書のように厳格な定義・証明として扱うわけでなく、実用本位の微積分法としてこの講義を進めてゆきたい。高校までの微積分学を十分に理解しているものとして、この講義を進めるので、高校までの微積分学については、序章において説明しているが、その内容については詳しくは述べない。その分野については、各自で学習しておいて欲しい。

また、ネットワークにおける文書配布の形式としてＰＤＦ[1]があり、このＰＤＦをフリーソフト[2]で作成できるようになってきた。また、フリーソフトであるオッフィス・ソフトである OpenOffice.org[3]では、ワードプロセッサでの文書作成を行い、その文書をＰＤＦに直接変換が可能になった。このようなフリーソフト群によるＰＤＦ作成システムを実際に使用して、実用に耐えるものであるかどうかを評価することも大きな目的となっている。平成 14 年度の夏にマルチプラットホーム（Windows や Linux など多様なコンピュータシステム）の文書配布形態としてＰＤＦに触れ、その実践として、この微分方程式入門講座を作成してみた。新しいことを理解・習得することに常に努めることは自分自身の資質を高めることにつながる。皆さんもこのことを忘れずにおいてください。

読者の益々の健闘を祈っている。

2003 年–月–日
高田　広志

[1]アドビシステムが開発した配布文書用のファイル形式
[2]Ghostscript、TEX、dvipdfm などの利用による PDF 作成が可能
[3]Sun Microsystem が開発している StarOffice のオープンソース版で、フリーソフトでありながら、マイクロソフト社のオッフィスソフトとファイル互換のものとして有名なもので、完成度も高い。また、このソフトは、Windows 上だけでなく、Linux などの他のＯＳ上でも利用できるマルチプラットフォームのオフィスソフトである。

2　微積分法入門

高校で学習した微積分法を初めから一通り復習してみよう。数学で微積分法を学習した人で微積分の公式を操るだけで微積分の本質を理解していない人を多く見かける。微積分の公式による計算技術のみを覚えて、微積分学の意味を理解せずに答えがでるだけレベルに留まっている。
このような暗記型の知識では、物理の中で微積分を有効に活用できるようにはなれない。微積分法を生きた知識とするためにも微積分の正しいイメージを掴んで欲しい。

2.1　関数の微分係数とグラフの接線の傾き

最初に微分について考えてみよう。微分係数の定義は変数のわずかな変化 Δx に対応する関数値の変化 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ の割合を表し、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

と定義する。

例えば、関数 $y = f(x)$ を $f(x) = x^2$ とすると、変数が x から $x+\Delta x$ のときの関数 y の値の変化は $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2$ だから、$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ である。これより、$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ である。この平均の増加の割合 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は変数 x の変化に対する関数値の変化 y の比であり、関数のグラフの平均の傾きを表す。このときの平均の傾きは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は $= \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ になるが、Δx は微少量になるので、このときの平均の傾きは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ と近似してよいだろう。

このような変数 x に対する関数 y の変化において変数の変化 Δx が微小であるときの変化率を扱うには、極限値 $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ とすればよい。この極限値を $\dfrac{dy}{dx}$ と表し、これを微分係数という。この微分係数は関数のグラフの接線の傾きを表していることになる。Δx が十分小さいものとして、これを $\dfrac{dy}{dx}$ と表したものが微分係数であり、この場合の関数 $y = x^2$ の微分係数は

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

と表すことができる。

> $\boxed{\text{重要}}$　微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ は関数のグラフの接線の傾きを表す

2.2　微分の定義と公式

微分法を扱う上で基本になる微分の定義とそれを一般的な数式に当てはめるための定義の拡張をまとめてみよう。

2.2.1　微分の定義

微分の定義は前述の通りである。関数 $y = f(x)$ の変数 x の微小変化 Δx に対する関数値 y の微小変化 Δy の割合の極限値である。

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

微分とはこの極限値を現すものである。

$$
\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2}
$$

2.2.2 関数の和・差の微分

関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の和の関数 $y = f(x) + g(x)$ の微分はどのようすればよいのだろうか。微分の定義 2 に基づいて求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) - f(x)\} \pm \{g(x+\Delta x) - g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) - f(x)\}}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{g(x+\Delta x) - g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)
\end{aligned}
$$

関数の和差の関数の微分はそれぞれの関数の微分の和差になり、非常に分かり易い結果となる。

$$
\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x) \tag{3}
$$

2.2.3 関数の積の微分

関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の積の関数 $y = f(x) \cdot g(x)$ の微分はどのようすればよいのだろうか。関数の和差の場合と同様に微分の定義 2 に基づいて求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{f(x) \cdot g(x)\} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x)\} - \{f(x) \cdot g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) g(x)\} + \{f(x+\Delta x) g(x) - f(x) g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \frac{\{g(\Delta x) - g(x)\}}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \frac{\{f(x+\Delta x) - f(x)\}}{\Delta x} \\
&= f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)
\end{aligned}
$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\cdot g(x)\} \quad = \quad f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) \tag{4}$$

2.2.4　関数の商の微分

関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の商の関数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の微分はどのようすればよいのだろうか。同様に微分の定義 2 に基づいて求めてみよう。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \quad = \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)g(x)-\{f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\}}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot\Delta x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot\Delta x}\\
&= \frac{\dfrac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \quad = \quad \frac{\dfrac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \tag{5}$$

2.2.5　関数の関数の微分

関数の変数が関数で表されるものをいう。その関数とは、$f(g(x))$ の形をとり、関数 f の変数が関数 $g(x)$ であるような場合である。この関数の微分係数を求めてみよう。微分の定義 2 に当てはめると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(g(x)) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&= \frac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot\frac{d}{dx}g(x)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dg(x)}f(g(x)) \cdot \frac{d}{dx}g(x) \tag{6}$$

2.3　微分の公式

2.3.1　整式の微分公式

　整式の微分について考えてみよう。最初は、定数式 $y = f(x) = C$ の微分を求めてみよう。微分の定義 (2) を適用して

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、定数関数は微分係数がゼロになる。
では、一次関数の微分係数も同様にして求めてみよう。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{(x+\Delta x)\} - x}{\Delta x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

続いて、一般的な 1 次式 $y = f(x) = ax + b$ の微分は、関数の和の微分と関数の積の微分を使って、求めると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(a \cdot x) + \frac{d}{dx}(b) \\ &= \frac{d}{dx}(a) \times x + a \times \frac{d}{dx}(x) + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

ここで、n 次式の微分係数を求めてみよう。始めに、$n = k$ の場合の $y = f(x) = x^k$ について 微分係数を次のように仮定してみよう。

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot x^{k-1}$$

数学的帰納法を使って、証明してみる。
　$y = x^{k+1}$ の微分係数を微分の定義式 (2) を適用して求めると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^k \cdot x) \\ &= \frac{d}{dx}(x^k) \times x + x^k \times \frac{d}{dx}(x) \\ &= k \cdot x^{k-1} + x^k \cdot 1 \\ &= (k+1) \cdot x^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

したがって、$n = k + 1$ の場合についても、微分係数の式 $\dfrac{dy}{dx} = k \cdot x^{k-1}$ が成立している。よって、全ての自然数 n について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

が成立する。また、一般的な整式についても、関数の和・差の微分、関数の積の微分の公式より証明することが出来る。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1} \tag{7}$$

2.3.2　無理関数の微分公式

無理関数 $y = \sqrt{x}$ の微分を求めてみよう。同様に、微分の定義 (2) を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

これは、$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ と考えたときの整式の微分公式 (7) を適用して、次のように考えることもできる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sqrt{x} &= \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{8}$$

2.3.3　指数関数の微分公式

指数関数の微分は、次の極限値を利用して求めることが出来る。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0}(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} &= e && \text{ただし、}e\text{ は自然数、}e = 2.71828... \\ \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e && \text{ただし、}e\text{ は自然数、}e = 2.71828... \qquad (9) \end{aligned}$$

自然数 e を底とする指数関数 $y = e^x$ を微分の定義式 (2) を使って微分してみよう。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

ここで、自然数 e の定義式 (9) の両辺を Δx 乗すると、

$$
\begin{aligned}
e^{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left((1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} \right)^{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

これを数式 (10) に代入するればよい。

$$
\frac{d}{dx}e^x = e^x
$$

$$
\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad (10)}
$$

2.3.4　対数関数の微分公式

対数関数 $y = \log_e x$ の微分係数を求めて見よう。定義式 (2) を適用すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log_e x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e(x + \Delta x) - \log_e x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e \left(\frac{x+\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e (1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e (1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \log_e (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} \cdot \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x} \qquad (11)}
$$

2.3.5　三角関数の微分公式

三角関数についても微分の定義式 (2) を適用して計算すればよい。この場合に使われる極限値は次の通りである。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \tag{12}$$

三角関数の一つである正弦関数 $y = \sin x$ の微分係数を求めてみよう。

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

ここで、三角関数の加法定理 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ を使って変形すると、

$$\begin{aligned} \sin(x+\Delta x) - \sin x &= \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x \\ &= \sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x \end{aligned}$$

になるから、これを正弦関数の極限値 (12) を使って計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin x(\cos^2 \Delta x - 1)}{\Delta x \cdot (\cos \Delta x + 1)} + \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{\sin x}{\cos \Delta x + 1} \cdot \frac{\sin^2 \Delta x}{\Delta x^2} \cdot \Delta x + \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) \\ &= -\frac{\sin x}{2} \cdot 1^2 \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

次に、余弦関数 $y = \cos x$ の微分係数を求めてみよう。正弦関数 $\sin x$ の微分と同様の方法で、微分の定義から求める正統法もあるが、今回は、関数の関数の微分 (6) を使ってみよう。$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ だから、$f(g(x)) = \sin f(x)$、$g(x) = \frac{\pi}{2} - x$ と考えて、公式 (6) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\cos x &= \frac{d}{dx}\sin(\frac{\pi}{2} - x) \\ &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2} - x) \\ &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

この方法を使う方が微分の定義から導くよりも随分と簡単になることを覚えておくと良い。このような数学の分野に限らず、多様な方法を理解しておくことで自分の行動や判断を自在に変化させることができるようなる。固定化された知識は生きた力につながらない。（教訓だよ）

$$\sin x = \cos x \tag{13}$$

$$\cos x = -\sin x \tag{14}$$

2.4　積分

2.4.1　グラフと面積

積分とは、微分計算と逆操作の関係になる。具体的に関数のグラフで考えてみよう。関数 $y = f(x)$ について考えてみよう。この関数が x 軸との間の面積を考える。$x = 0$ から $x = x$ の間の面積を $S(x)$ とする。$x = x + \Delta x$ のときの面積は $S(x + \Delta x) = S(x) + y \cdot \Delta x$ と表される。これを変形すると、

$$y = \frac{S(x + \Delta x) - = S(x)}{\Delta x}$$

この関係式はグラフの面積は「微分したときにその関数になるもの」に相当することを示している。したがって、「グラフの面積を求める操作」、「微分したときその関数になる関数」として積分（定積分）を定義できることになる。（数学のように厳密さはないが、物理だから許せる !?）

なお、定積分の操作を表す数式として、次の様な表現で表すことにする。

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^b f(x)\, dx \\ \text{ただし、}f(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{15}$$

また、定積分の範囲を決めない（不定範囲）の定積分を、不定積分という。

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\, dx \\ \text{ただし、}f(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{16}$$

2.5　積分公式

2.5.1　整式の積分公式

微分のときと同様に、整式の積分から説明してみよう。以下不定積分で表現する。

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad C \text{ は積分定数}$$

なお整式の積分公式 (17) の左辺を微分すると、積分前の関数に戻ることを確かめてみると良い。

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad C \text{ は積分定数}} \tag{17}$$

2.5.2　置換積分の公式

関数の関数の微分公式 (6) の両辺を積分したものを、置換積分という。

関数の関数を微分する公式の両辺を積分したものが置換積分の基本公式となる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(g(x)) &= \frac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot\frac{d}{dx}g(x)\\ f(g(x)) &= \int\frac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot\frac{d}{dx}g(x)dx\end{aligned}$$

$$f(g(x)) = \int\frac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot\frac{d}{dx}g(x)dx$$

$$f(g(x)) = \int\frac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot\frac{d}{dx}g(x)dx \tag{18}$$

2.5.3 部分積分の公式

関数の積の微分公式 (4) を利用する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{f(x)\cdot g(x)\} &= f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)\\ \int f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)dx &= f(x)\cdot g(x)-\int g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)dx\end{aligned}$$

この公式を使いこなすためには、十分な練習が必要である。練習を積み重ねることでして、積分する関数をどのように２つの関数に分解するかが分かるようになる。（簡単なものから難しいものまで段階を追って練習し、その操作を覚えてしまうこと）

$$\int f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)dx = f(x)\cdot g(x)-\int g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)dx \tag{19}$$

3 微分方程式

3.1 微分方程式を作る

例題

関数上の点 (x, y) での接線の傾きが y に等しく、点 $(0, 2)$ を通る関数とはどのようなものだろうか？

まず、この関数の微分方程式を作ってみよう。グラフの傾き $\dfrac{dy}{dx}$ が y に等しいから、次の関係式が成立する。

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{20}$$

以上のように、微分係数を含む関係式を微分方程式という。このような関係式（微分方程式）を満たす関数 $y = f(x)$ とはどのようなものだろうか。微分方程式といっても、特別なものではない。その関数の条件を「微分係数を含む関係式」として表しているに過ぎない。では、その微分方程式の解法について考えてみよう。

3.2 変数分離法

微分方程式を解く技術として、微分方程式に含まれる変数に注目して解く巧い方法がある。これを変数分離法という。変数分離法では、「変数分離」という作業が行なわれる。「変数分離」とは、同一種類の変数を方程式の両辺に分ける操作をいう。では、具体的な例を上げて説明してみよう。

微分方程式 (20) の場合、この方程式には、変数 x、y の 2 つの変数が含まれている。「変数分離」を行なうには、この変数 x と y を両辺に移動するように変形すればよい。右辺に x、左辺に y になるように変数分離すると次のような微分方程式に変形できる。このとき、微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ を分数のように考えて変形することが出来る。分母に相当する dx を右辺に、y を左辺に移動すると、微分方程式 (20) は

$$\frac{dy}{y} = dx$$

このようにする操作を「変数分離」するという。これで、微分方程式の変数が各辺に 1 つだけになる。したがって、それぞれ両辺を積分することが出来るようになる。両辺を積分すると、

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

だから、積分公式を適用して、積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \log_e |\, y \,| &= x + C \qquad (C \text{ は積分定数}) \\ y &= \pm e^{x+C} \\ y &= A \cdot e^x \qquad (\text{定数 } A = \pm \cdot e^C) \end{aligned} \tag{21}$$

ここで得られた関数は定数 A を含んでいるため、関数を確定できていない。この定数 A 確定するには、微分方程式の初期条件や境界条件と呼ばれる微分方程式の条件を適用してこの定数 A を確定することができる。この作業における、境界条件、初期条件に相当するものは、この微分方程式の場合、時刻 $x = 0$ のとき $y = 2$ であるという条件（これを「境界条件」という）を利用してこの積分定数 A を確定することができる。

この関数は点 $(0, 2)$ を通ることから、$x = 0$、$y = 2$ を微分方程式を解いて得られた関数 21に代入してやると、

$$2 = A \cdot e^0$$
$$A = 2$$

よって、関数上の点 (x, y) での接線の傾きが y に等しく点 $(0, 2)$ を通る関数は次のような関数であることがわかる。

$$y = 2 \cdot e^x$$

このようにして微分方程式 (20) の解が求められるのである。ただし、変数分離法でどの微分方程式でも解が求まるわけでは無論ない。(微分方程式の世界は神秘的だ！)

例題

3.3　速度と加速度

続いて、物理分野での微分方程式の実用例を研究してみよう。当然、物理の最初は速度、加速度の分野である。この分野の微分・積分法の扱いは、ニュートン自身が発明したものであり、ニュートン自身も微分法の創始者[4]の一人である。

物理での微積分の考えは多くの分野に当てはめることが出来る。例えば、速度、加速度も微分の考えそのものである。速度の定義について考えてみよう。物体が運動しているとき、時間 t のときの位置が x から $t + \Delta t$ のときの位置 $x + \Delta x$ に移動した場合、移動時間 Δt の間の移動距離が Δx だから、そのときの平均の速度は $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ である。このとき、移動時間 Δt をゼロに近づけると、瞬間の速度になる。

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{22}$$

これより、速度は位置を時間を変数として微分したものであることが分かる。同様に、加速度についても定義により求めると、

$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{dv}{dt} \qquad (23) \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (24) \end{aligned}$$

となるので、加速度は速度を時間を変数として微分したものであり、位置を時間で 2 次微分したものであることがわかる。

したがって、位置、速度、時間は、微積分学を使えば、次のように考えることができる。

$$\boxed{\text{位置}} \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftharpoons}} \boxed{\text{速度}} \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftharpoons}} \boxed{\text{加速度}} \tag{25}$$

[4]微分・積分法を数学として完成したのはライプニッツによる

3.4 等加速度運動と微分方程式

落下運動とは、重力が働く空間における物体の運動をいう。物体に働く力は一定の重力だけだから、運動方程式は $ma = mg$ となり、加速度は $a = g$ で一定の等加速度運動になる。等加速度運動には３つの公式の存在がある。

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 && (26) \\ v &= v_0 + at && (27) \\ v^2 - v_0^2 &= 2ax && (28) \end{aligned}$$

この３つの公式を用いて速度や位置を計算できることは、幾度となく計算経験があるはずだ。公式を暗記するのではなく、微積分法を用いて理論的にすっきりした形に構成することができる。一般に、速度は $v = \dfrac{dx}{dt}$ になり、加速度は $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ と表すことができる。

落下運動は下向きに重力加速度 g の等加速度運動だから、上向きを正として $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -g$ になる。この微分方程式を解けばよい。

落下運動

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

微分方程式１ $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g$ と微分方程式２ $\dfrac{dv}{dt} = -g$ に分けて考える。

最初に、微分方程式１について解く。変数分離して、$dv = -gdt$ だから両辺を積分すると $\int dv = \int -gdt$ より、$v = -gt + C$ (C は積分定数) である。初期条件 $t = 0$ のとき $v = v_0$ だから、これを代入して、$v_0 = C$ だから、$v = -gt + v_0$ となり、2 番目の公式に一致する。

つぎに、$v = \dfrac{dx}{dt}$ より、$-gt + v_0 = \dfrac{dx}{dt}$ だから、変数分離して、積分すればよい。$\int -gt + v_0 dt = \int dx$ だから、$-\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C = x$ になる。初期条件 $t = 0$ のとき $x = 0$ だから、$x = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ になる。

例題

1. **高さ 5.0 メートルの柱の上に電球がついている。身長 2.0 メートルの人が秒速 1.0 メートルで電柱から遠ざかっている。頭の影が動く速度を求めなさい。**

 人が電柱から x メートル離れたところにいるとき、頭の影の位置が y メートルの位置にできるとする。 このとき、$5.0 : 2.0 = y : y - x$ の比例関係が成立する。

$$\begin{aligned} 2y &= 5(y - x) \\ y &= \frac{5}{3}x && (29) \end{aligned}$$

人の移動速度は秒速 1.0 メートルだから、位置 x の時間 t で微分したものが速度だから、次の式が成立する。

$$\frac{dx}{dt} = 1.0 \qquad (30)$$

また、上の関係式 (29) の両辺を時間 t で微分すると、次のようになる。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5}{3} \cdot \frac{dx}{dt}$$

これに式 (30) を代入すると、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5}{3} \times 1.0$$

影の速度は $\dfrac{dy}{dt}$ だから、影の速度は秒速 $\dfrac{5}{3} = 1.7$ メートルになる。

2. **高さ 5.0 メートルの柱の上に電球がついている。2.0 メートル離れた位置の地上か秒速 0.10 メートルの等速で上昇する物体がある。地上に出来るこの物体の影の速度が秒速 5.0 メートルを超えるのは何秒後になる。**

時刻 t 秒のときの物体の高さは $0.1t$ メートルである。影の移動方向を x 軸にとり、影の位置を x メートルとする。前例題と同様に考えるとよいので、次の様な比例関係が成立する。

$$5.0 : 0.1t = x : x - 2$$

比例式を普通の方程式に変えると、

$$\begin{aligned} 0.1tx &= 5(x-2) \\ x &= \frac{10}{5 - 0.1t} \end{aligned} \tag{31}$$

両辺を時間 t で微分すると、次の式になる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(5-0.1t)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(5-0.1t)^2} > 5 \tag{32}$$

この不等式を解くと影の速度が秒速 5.0 メートル以上になる時刻が求められる。

$$\begin{aligned} 1 &> 5 \cdot (5 - 0.1t)^2 \\ 1 > 25 - 0.5t \quad \text{かつ} \quad 5.0 &- 0.1t > 0 \\ t &< 49 \end{aligned} \tag{33}$$

また、時刻 $t = 50$ 秒以上のとき、電球の高さを物体が超えるので棒の頭の影が出来なくなる。よって、$t = 49$ 秒のとき、影の速度が秒速 5.0 メートルを超えることになる。

3.5 等速円運動と単振動

3.5.1 等速円運動

固定点からの距離と速さが一定の運動は自然界にも多く見られる運動のひとつである。この運動を等速円運動といい、その運動を表す物理量として、運動する物体の質量 m、半径 r、速さ v の 3 つを用いて表現される。また、速さについては、中心から見た物体の角度の変化の速さを表す角速度 ω 、単位時間当たりの回転数 n 、一回転の時間である周期 T で代えることが出来る。

それぞれの物理量の単位には、角速度が [rad/s](ラジアン毎秒)、回転数が [回/s] や [rpm](１分間の回転数 round per minute)、周期が [s] (秒) が良く使われる。

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{v}{r} \\
n &= \frac{v}{2\pi r} \\
T &= \frac{2\pi r}{v}
\end{aligned}
$$

具体的に考えてみよう。質量 m[kg]、回転半径 r [m]、角速度 ω [rad/s] の等速円運動では、ここで、xy 軸に分解して表現すると、この等速円運動の物体の位置 (x, y) は、初期位相を δ とすると

$$x = r \cdot \cos(\omega t + \delta) \tag{34}$$

$$y = r \cdot \sin(\omega t + \delta) \tag{35}$$

位置を微分したものが速度、速度を微分したものが加速度になるから、

$$v_x = -r\omega \cdot \sin(\omega t + \delta) \tag{36}$$

$$v_y = r\omega \cdot \cos(\omega t + \delta) \tag{37}$$

$$a_x = -r\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \delta) \tag{38}$$

$$a_y = -r\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \delta) \tag{39}$$

この等速円運動における、物体の速さ v は $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$、物体の加速度の大きさ a は $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$ と表すことが出来る。また、位置 $\vec{v} = (v_x, v_y)$、速度 $\vec{v} = (v_x, v_y)$、加速度 $\vec{a} = (a_x, a_y)$ の向きについて考えてみよう。ベクトルで表示すると $\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{x}$、$\vec{v} \cdot \vec{x} = 0$ ($\cdot$ はベクトルの内積を表す) になる。このことから分かることは、速度ベクトルの向きと位置ベクトルの向きは垂直（直角）であり、また、加速度ベクトルの向きは位置ベクトルの向きと反対向き（すなわち、中心方向）であることだ。

また、速度、加速度、力の大きさについて考えてみる。速度、加速度の関係式を使って、$v = |\vec{v}|$、$a = |\vec{a}|$ 代入して整理すると、次の様に表すことが出来る。

$$
\begin{aligned}
v &= r\omega \\
a &= r\omega^2 \\
&= \frac{v^2}{r}
\end{aligned} \tag{40}
$$

よって、物理で習った等速円運動の公式が微積分法を使って導かれることが分かる。

3.5.2 円運動の向心力

次に、等速円運動のとき、物体に働く力を考えてみよう。ニュートンの運動の法則によると、物体に働く力 f は、物体の質量 m、加速度 a を用いて $f = ma$ と表される。よって、物体に働く力 $\vec{f} = (f_x, f_y)$ とすると、

$$f_x = -mr\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \delta) \tag{41}$$

$$f_y = -mr\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \delta) \tag{42}$$

$\vec{f} = -m\omega^2 \cdot \vec{x}$ だから、力の向きは 位置ベクトルと反対向き、すなわち、中心向きの力（向心力という）が働いていることを示している。また、物体に働く力の大きさ f は $f = \sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2}$ であるので次のような関係式が成立する。

$$\begin{aligned} f &= mr\omega^2 \\ &= \frac{mv^2}{r} \end{aligned}$$

これは、等速円運動の向心力の公式を導いたことになる。以上のように、「位置、速度、加速度の関係は微分、積分によって互いに変換できること」を使えば、等速円運動も、等加速度運動と同じ考え方で統一することができる。次に示すその他の運動についても、微積分法による「力学の考え方の統一」が可能であることから、自然が「単純」、「明解」な仕組みで作り上げられていることを示している。

3.5.3　ばねの単振動

ばねにつながれた物体の振動運動を考えてみよう。この講座で学んできた知識だけで、単振動運動の解析ができてしまう。必要な知識は運動方程式と微積分学（微分方程式）だけで、解法はまったく同じだ。すなわち、「位置の時間微分したものが速度、速度の時間微分したものが加速度」だけである。

具体的なばねの単振動の例をひとつ挙げてみよう。滑らかで水平な床の上に置かれた質量 m [kg] の物体に自然長 L [m]、ばね定数 k [N/m] のばねを取り付けた。ばねの他端は壁に固定し、物体を引き ばねを d [m] 伸ばした。時刻 $t = 0$ のとき、物体から静かに手を離した。その後、物体は水平な床の上で振動を続けた。

原点をばねを取り付けた壁の位置とする。物体の位置を x としたとき、物体に及ぼすばねの力は $f = k(L - x)$ [N] になる。物体の加速度を a として、運動方程式を作ると次のようなものとなる。

$$ma = k(L - x) \tag{43}$$

位置、速度、加速度の関係を微分法で表すと次の関係が成立する（既述）から

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

これより、解くべき微分方程式は次のものになる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k(L - x)}{m}$$

このような２次微分係数を含む微分方程式は変数分離法が使えない。　微分方程式を変形すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x + \frac{kL}{m}$$

$X = x + x_0$ と置いて、この微分方程式を定数項がない簡単な形（標準形）に変換する。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(X - x_0) &= -\frac{k}{m} \cdot (X - x_0) + \frac{kL}{m} \\ \frac{d^2}{dt^2}X &= -\frac{k}{m} \cdot X + \frac{k}{m} \cdot (x_0 + L) \end{aligned} \tag{44}$$

定数項がない簡単な形にするには、$x_0 = -L$ になるようにすればよい。したがって、$X = x - L$ と置き換えてやれば標準形に変換できる。

$$\frac{d^2}{dt^2}X = -\frac{k}{m}\cdot X \qquad \text{ただし、} X = x - L \tag{45}$$

この微分方程式 (45) の解法は、２回微分したとき、その関数の形に戻る関数を見つければよい。これは、三角関数の正弦関数 $(\sin\theta)$ や余弦関数 $(\cos\theta)$ になる。この場合に当てはめると、$X = A\cdot\sin(\alpha\cdot+\delta)$（$A$、$\alpha$、$\delta$ は未確定の定数）とおけばよい。これを、微分方程式 (45) に代入して、未確定の定数を求めてみる。

$$-\alpha^2\cdot A\cdot\sin(\alpha\cdot+\delta) = -\frac{k}{m}\cdot A\cdot\sin(\alpha\cdot+\delta)$$

よって、

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{46}$$

よって、位置、速度を数式に表すと、

$$x = A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+\delta\right)+L \tag{47}$$

$$v = A\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+\delta\right) \tag{48}$$

また、初期条件（時刻 $t = 0$ のとき、$x = L + d$、$v = 0$ ）から

$$\begin{aligned} L+d &= A\cdot\sin\delta+L \\ 0 &= A\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\cos\delta \end{aligned}$$

上の２式より、

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\pi}{2} \\ A &= d \end{aligned}$$

このばねの単振動の周期を求めてみる。三角関数の周期に等しいから次のようになる。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{49}$$

以上より、このばねの単振動は次のように表すことができる。

$$x = d\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+L \tag{50}$$

$$v = -d\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t \tag{51}$$

3.5.4　単振り子

小さなおもりを糸につるして振動させると、周期が一定のふりこができる。ふりこの振れ幅が小さいとき、これを「単振り子」という。この単振り子は単振動の代表的なものである。振り子の長さを l [m]、重力加速度を g[m/s2] とすると、単振り子の周期は $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ と表すことができる。これを運動方程式を作って導いてみよう。

糸が鉛直線から傾いた角度を θ、おもりの最下点の位置を原点 $x = 0$ とする。おもりの振れが小さいときを考えると、振れ角が θ のとき、おもりの位置は $x = l\sin\theta$ になる。θ が小さいから、$\theta \approx \frac{x}{l}$ と近似することができる。

このとき、おもりに働く復元力は $f = -mg\sin\theta$ になるから、おもりの運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} ma &= -mg\sin\theta \\ &= -mg\cdot\frac{x}{l} \\ \frac{d^2}{dt^2}x &= -\frac{g}{l}\cdot x \end{aligned} \tag{52}$$

この微分方程式は2次微分係数が元の関数の負の定数倍になっていることから、関数 $x = f(t)$ は次の形の関数であることが分かる。

$$x = A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta\right) \tag{53}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ &= A\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta\right) \end{aligned} \tag{54}$$

積分定数 A、δ については、境界条件、初期条件により確定することが出来る。

初期条件を、時刻ゼロのときのおもりの位置は $x = A$ とし、その位置での速度を $v = 0$ とするとき、単振り子の位置、速度を表す関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= A\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \\ v &= \frac{dx}{dt} \\ &= A\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -A\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t \end{aligned} \tag{55}$$

3.6 仕事とエネルギー

3.6.1 ばねの弾性力による位置エネルギー

ばねの力 f は、ばねの伸び x に比例する[5]ので、ばねの力の大きさは $f = kx$ である。ばねの伸びを x から $x + \Delta x$ に Δx だけ伸ばすときにする仕事 $DeltaW$ は、$\Delta W = f \cdot \Delta x$ になるので、$\Delta W = kx \cdot \Delta x$ 。このときの微分方程式は

$$\frac{dW}{dx} = kx$$

変数分離して $dW = kxdx$ だから、両辺積分することで仕事 W を求めることができる。

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + C \qquad C \text{ は積分定数}$$

ここで、ばねの伸びがゼロのときを基準とすると、$x = 0$ において $W = 0$ の境界条件が成立するので、これを適用して

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{ばねの弾性力による位置エネルギーの公式}$$

この式は力学的エネルギーのところで学習するおなじみの公式である。

3.7 電流と電気量

3.7.1 コンデンサーに蓄えられるエネルギー

電気の世界でも微分方程式は活躍する。コンデンサーは電気を蓄える電気部品である。コンデンサーに蓄えられる電気量 Q クーロン[6]、コンデンサーにかけられた電圧 V ボルト[7]、コンデンサーの電気容量 C ファラド[8]とすると、コンデンサーの公式 $Q = CV$ が成立する。また、電位差 V ボルトの間を q クーロンの電気を運ぶとき、仕事は $W = qV$ ジュールになる[9]。これを利用して、コンデンサーに蓄えられるエネルギーを計算してみよう。Q クーロン蓄えられているコンデンサーに更に Δq クーロンの電荷を追加するときに必要なエネルギーは $\Delta W = \Delta q \cdot V$ である。また、このときのコンデンサーの電圧 V はコンデンサーの公式 $Q = CV$ から $V = \dfrac{q}{C}$ だから、これらをまとめて微分方程式に作ると次のようになる。

$$dW = \frac{q}{C}dq$$

このままで変数分離されているので両辺を積分すると

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C}$$

コンデンサーの公式を使って変形するとおなじみのコンデンサーのエネルギーの公式が導かれる。

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

[5] 1660 年、イギリスのフックは弾性体の変形が加えた力に比例する法則を発見
[6] 1 アンペアの電流で 1 秒間流れたときの電気量と定義する
[7] 1 クーロンの電荷を運ぶとき、1 ジュールの仕事が必要な電圧（電位差）と定義する
[8] 1 ボルトかけたとき、蓄えられる電気量が 1 クーロンであるコンデンサーの電気容量と定義する
[9] 電位差の定義に当たる

3.8　電磁誘導の法則

3.8.1　誘導起電力

ファラデーの電磁誘導の法則は、コイルを貫く磁束の変化によりコイルに誘導起電力が生まれる現象を扱う。コイルの巻数を n 回とするとき、コイルを貫く磁束が　Δt 秒間に $\Delta\Phi$ [Wb] であるとき、コイルに発生する誘導起電力は次のように表される。

$$V = (-)n \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{ーは起電力の向きが磁束の変化を妨げる方向であることを示す} \tag{56}$$

3.8.2　コイルのインダクタンス

コイルに電流を流そうとするとき、電流を増加させようとするとき、ファラデーの電磁誘導の法則によりコイルには電流増加に逆らった誘導起電力（逆起電力）が生じる。電流変化に対する逆起電力が生じる割合をコイルの自己インダクタンスという。自己インダクタンスの単位はヘンリー[10]と呼ばれ、単位記号は [H] である。自己インダクタンスの定義式（公式）は次のようになる。

$$V = (-)L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad L\ \text{はコイルの自己インダクタンス} \tag{57}$$

半径 r、長さ l、N 回巻のコイルの場合の自己インダクタンスを考えてみよう。このコイルは半径に比べ十分な長さがあり、かつ均等に密に巻かれているものとして、コイルをソレノイドと考えることができる。ソレノイドの内部に作られる磁界の強さは $H = nI$ の公式に当てはめると、$H = \dfrac{N}{l} \cdot I$ である。したがって、このコイルを貫く磁束の量は $\Phi = \pi r^2 \cdot \mu \dfrac{N}{l} \cdot I$ になる。時間 ΔT の間に電流の変化が $I \to I + \Delta I$ に変化する場合に生じる逆起電力を求めてみると

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \pi r^2 \cdot \mu \frac{N}{l} \cdot \Delta I \\ V &= (-)N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \\ &= (-)N \cdot \frac{N\pi r^2 \cdot \mu \cdot \Delta I}{l\Delta t} \end{aligned} \tag{58}$$

上の関係式を整理して、コイルのインダクタンスの定義式の形になるように変形し比較すると、このコイルの自己インダクタンス L は次のようになる。

$$V = (-)N \cdot \frac{N\pi r^2 \cdot \mu}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \tag{59}$$

$$L = \frac{\mu\pi r^2 N^2}{l} \tag{60}$$

この自己インダクタンスの公式はコイルをソレノイド[11]として扱っているため、正確にはコイルの形状効果（エッジ効果）があるため、磁束の漏れが生じるので現実のコイルのインダクタンスは理論値より小さくなる。

[10] 1秒間に1アンペアの電流変化があるとき、1ボルトの逆起電力が生じるコイルの自己誘導係数（自己インダクタンス）と定義する

[11] コイルの両端の効果がない物として扱える。十分に長く巻かれたコイルのことで、コイルの半径に対して長さが十分に長いもの

3.8.3 コイルに蓄えられるエネルギー

コイルに電流を流すときに逆起電力に逆らって電流を流すためのエネルギーを求めてみよう。Δt の間に電流が I から $I{+}\Delta I$ に増加させたときを考える。コイルに発生する逆起電力は $V=(-)L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ になるから、Δt 間に加えたエネルギー ΔW は次のような形になる。

$$\begin{aligned}\Delta W &= L\frac{\Delta I}{\Delta t}\cdot I\cdot\Delta t\\ \Delta W &= LI\Delta I\end{aligned}$$

両辺を積分してエネルギー W を求めると、自己インダクタンス L のコイルに電流が I 流れているときにコイルが蓄えているエネルギーは次のようになる。

$$\begin{aligned}\int dW &= \int_0^I LIdI\\ W &= \frac{1}{2}LI^2\end{aligned}\tag{61}$$

3.9 交流回路

3.9.1 容量リアクタンス

電気容量 C のコンデンサーは端子の両端に電圧 V を加えたとき、コンデンサーに蓄えられる電気量 Q は　$Q=CV$ になることは前にも述べた。このコンデンサーに交流を加えたとき、どのような電流が流れるのだろうか。　ここでコンデンサーに加えた交流電圧（周波数 f、最大値 V_0 ）とすると $V=V_0\sin 2\pi ft$ である。電流 I が Δt の間流れたとき、コンデンサーに蓄えられる電気量の増加は $\Delta Q=I\cdot\Delta t$ であるから、コンデンサーに流れる電流は $I=\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ だから、コンデンサーに流れる電流 I は「コンデンサーに蓄えられえる電気量の時間微分 $\dfrac{dQ}{dt}$」に等しくなる。

$$\begin{aligned}I &= \frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}(C\cdot V_0\sin 2\pi ft)\\ &= 2\pi fC\cdot V_0\cos 2\pi ft\\ &= 2\pi fC\cdot V_0\sin\left(2\pi ft+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\tag{62}$$

コンデンサーのリアクタンス[12]は交流に対する抵抗成分と定義するから、このコンデンサーのリアクタンス Z_c は $Z_c=\dfrac{V}{I}$ と表すことができる。また、このとき、コンデンサーの電流の位相は電圧の位相に対して $\dfrac{\pi}{2}$ 進むことを示している。

$$Z_c = \frac{1}{2\pi fC}\quad\left(=\frac{1}{\omega C}\ \text{ただし}\omega=2\pi f\right)\tag{63}$$

3.9.2 誘導リアクタンス

自己インダクタンス L の定義によると、コイルの電流が時間 Δt に ΔI 変化するとき、コイルに誘導起電力が $V=(-)L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ 生じる。したがって、交流電圧 $V=V_0\sin 2\pi ft\ (=V_0\sin\omega t)$ がコイルにかかるとき、純抵抗成分がない場合には加えた交流電圧と逆起電力の大きさは等しくなる。

[12]交流に対する電気抵抗に相当するものを意味する

$$V_0 \sin 2\pi f t = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} \tag{64}$$

これより、$V_0 \sin 2\pi f t = -L\dfrac{dI}{dt}$ になるから、両辺を時間 t で積分すると、次のような電流がコイルに流れる。

$$\begin{aligned} I &= -\frac{V_0}{2\pi f L}\cos 2\pi f t \\ &= \frac{V_0}{2\pi f L}\sin\left(2\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{65}$$

しがたって、コイルのリアクタンス（交流に対する抵抗として働く成分）は次のようになる。

$$Z_L = 2\pi f L \quad (= \omega L \quad \text{ただし} \ \ \omega = 2\pi f) \tag{66}$$

式**??**の結果より、電圧の位相に対して電流の位相が $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れることを示している。

3.10 原子物理学

3.10.1 半減期と微分方程式

原子は安定な原子のほかに、時間とともに放射線を放出し別の原子に変わるものがある。これを「原子崩壊」という。原子崩壊により、その原子が減少するスピードを表すものに半減期という物理量がある。半減期の定義は、原子崩壊によりその原子が半分に減少する時間である。

半減期 [13]を T とするとき、時刻 $t=0$ において N_0 個の原子があるとすると、時刻 t になるとき、原子数は $N = N_0 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{t}{T}}$ になることを示している。では、このように原子崩壊によりその原子が半分になる時間が決まっている理由は何だろうか。

原子崩壊という現象が確率現象であると考えてみる。ある原子が単位時間当たり p の確率で崩壊するものと仮定しよう。時刻 $t=0$ のとき、その原子数が $N = N_0$ 個あったものとする。ある時刻 t のとき、原子数が N 個であったとき、僅かな時間 Δt の間に崩壊する原子数は $Np\Delta t$ になる。これが減少する原子数だから、関係式 $\Delta N = -Np\Delta t$ が成立する。これより、原子崩壊の微分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{\Delta t} &= -Np \\ \frac{dN}{dt} &= -Np \end{aligned}$$

これを変数分離して積分すると、$\log_e |N| = -pt + C$ であるから、$N = \pm e^C \cdot e^{pt}$ である。初期条件 $t=0$ で $N = N_0$ を代入して、積分定数 C を定めると、

[13]ウラン２３８ (^{238}U) は４５億年、ストロンチウム９０ (^{90}Ｓｒ) は２９年、ヨウ素１３１ (^{131}Ｉ) は８日など

$$
\begin{aligned}
N &= N_0 e^{-p \cdot t} \\
&= N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_{\frac{1}{2}} e \cdot pt} \\
&= N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{pt}{log_e \frac{1}{2}}}
\end{aligned}
\tag{67}
$$

上の関係から、半減期は原子が崩壊する確率を用いて次のようにあらわすことができる。

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{log_e 2}{p} = \frac{\log_{10} 2}{p \cdot \log_{10} e} \\
&= \frac{0.693147...}{p}
\end{aligned}
\tag{68}
$$

以上の結果より、「半減期が一定である」という原子崩壊のルールは、「原子が崩壊する確率が一定である」ことだけで説明できる。

4 実践練習

4.1 基本問題

練習１ $y = f(x)$ が原点 $(0, 0)$ を通り、$y = f(x)$ 上の点の任意の点P (x, y) と定点A $(0, a)$ を結ぶ線と接線が直交するとき $f(x)$ を求めなさい。

（幾何学によると円周角が等しいので P の軌跡は円になるはずだが、きちんと計算して求めてください）

練習２ 大きなタンクに入っている水がタンクの底から抜けてゆく経過を計算してみよう。タンクのサイズは半径が R、高さが H で、底に開けた穴の大きさは半径が r である。タンク一杯に入った水が穴から出てゆくとき、時刻 t のとき、水面の高さを $h = f(t)$ として、この関数 $f(t)$ を求めなさい。

4.2 応用問題

練習３ 電圧を V_0 (V)、内部抵抗が r (Ω) の電源でコンデンサーを充電する。このとき、コンデンサーの電圧がどのように上昇してゆくかを時間の関数として求めなさい。このとき、充電するコンデンサーの電気容量 を C (F) とする。

練習４ コンデンサーを充電するとき、電池が供給するエネルギーの半分がコンデンサーのエネルギーとして蓄えられる。残りの半分は回路の抵抗（電池の内部抵抗を含む）により消費される。本当だろうか？ 正確に計算してみよう。

充電するコンデンサーの電気容量を C (F)、電池の電圧を V_0(V)、回路の抵抗を R（Ω ）とする。

練習５ 電圧を V_0 (V)、内部抵抗を r (Ω) の電源にコイルを接続し、スイッチを入れた後、コイルに流れる電流の変化がどのように変化するかを求めなさい。このとき、コイルのインダクタンスを L (H)、電圧を V_0 (V)、内部抵抗を r (Ω) とする。

練習６ 空から雨粒が落ちてくるときの運動を考えてみよう。雨粒の質量が m(kg)、雨粒が空気から受ける抵抗力は雨粒の速度に比例する。この抵抗力を $f = kv$ 、重力加速度を g として考えてみよう。この抵抗力のため、雨が地上に落下する速度はある程度の大きさに制限される。この速度を終速度という。

4.3 発展問題

練習７ 水の中で振り子を振らせたとき、振り子はどのように動くだろうか？ 空気中と異なり水の中では水による抵抗力が大きくなるので、振り子の動きは急速に失われる。水の抵抗力をどのように扱うかは、流体力学という物理学を学ぶ必要がある。今回は深く考えずに、水の中での「抵抗力は振り子の速度に比例する」と単純化して扱うことにしよう。振り子の速度を v とすると、振り子が受ける水の抵抗力は $f = kv$ （k は抵抗力の比例定数）と表すことが出来る。このときの振り子の運動を解析してください。

練習８ コイル（L[H]）、コンデンサー（C[F]）、抵抗（$R[\Omega]$）を直列接続した回路に交流 $V = V_0 \sin(2\pi ft)$ を加えたときの電流を求めなさい。また、この回路のインピーダンスを求めなさい。

追加資料

A 追加資料

A.1 ベクトル変数、関数の微積分

ニュートンが運動の法則を作り上げたとき、ベクトルという概念が微分・積分とともに登場する。原点（基点）となるところからその位置への向きと距離を指定することとで物体の位置を表記する。この向きと距離で表される位置の物理量を「位置ベクトル」という。位置ベクトルは x, y, z の直交座標軸を使った表記である「座標表記」を使って、$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ と表すことが出来る。物体の位置は時間とともに変化するから、位置ベクトル $\vec{r}$ は時間 t の関数であり、その座標表記の r_x, r_y, r_z も時間 t の関数である。　速度は $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ と表すことができるので、位置の時間微分が速度に対応するので、$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ と表すことが出来る。ベクトルの微分は直交座標表記の各座標成分の微分したベクトルに相当するため、$\vec{v} = \left(\dfrac{dr_x}{dt}, \dfrac{dr_y}{dt}, \dfrac{dr_z}{dt} \right)$ と表すことが出来る。また、加速度は速度の時間微分になるから、$\vec{a} = \left(\dfrac{dv_x}{dt}, \dfrac{dv_y}{dt}, \dfrac{dv_z}{dt} \right)$ である。これらを使って加速度を表すと次の様になる。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{69}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{70}$$

これを用いると落下運動を始めとする各運動についての表記が 1 つの形に統合され、すべてが次の形の式になる。これがニュートンの運動の法則の真の姿になる。

$$m\vec{a} = \vec{f} \qquad m \text{ は質量、} \vec{a} \text{は加速度ベクトル、} f \text{ は力ベクトル} \tag{71}$$

例を挙げてこれを説明してみよう。落下運動の場合では、力は重力だけになる。鉛直方向上向きを y 軸、水平方向を x 軸として考えてみると、力は $\vec{f} = (0, -mg)$ だから、落下物体の加速度ベクトルは次の様になる。

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = \left(0, \frac{f}{m}\right) = \left(0, -\frac{mg}{m}\right) = (0, -g) \tag{72}$$

これを使って微分方程式に持ち込むと位置の座標表記の成分は次のようになる。

$$x \text{ 成分} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{73}$$

$$y \text{ 成分} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{74}$$

この微分方程式を解くけばよい。結果は次のようになる。

$$\begin{array}{lll} x \text{ 成分} & v_x = v_{x0} & x = v_{x0} \cdot t + x_0 \\ y \text{ 成分} & v_y = -gt + v_{y0} & y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{y0} \cdot t + y_0 \end{array} \tag{75}$$

自由落下の場合は v_{x0}, v_{y0} がともにゼロである。また、水平投射の場合は v_{x0} がゼロでなく、v_{y0} がゼロである。また、斜方投射の場合は v_{x0}, v_{y0} ともにゼロでないだけで、すべて同等の方程式になってしまう。

A.2 複素関数の微積分

複素関数の場合もベクトルと同様になり、実数部分、虚数部分それぞれを微分したものであらわされるだけで特に難しいものではない。　例えば、$y = A(\sin\omega t + i\cos\omega t)$ は原点を中心として複素数面を距離 A のところを角速度 ω で回転する点を y が表している。
これを微分すると、$v = \dfrac{dy}{dt} = A\omega(-\cos\omega t + i\sin\omega t)$ である。
オイラーの定理[14]という面白い考え方がある。$e^{i\omega t} = \sin\omega t + i\cos\omega t$ と表わすことが出来るというもので、両辺を t で微分してやると

$$\begin{aligned} \frac{de^{i\omega t}}{dt} &= i\omega e^{i\omega t} \\ &= i\omega(\sin\omega t + i\cos\omega t) \\ &= \omega(-\cos\omega t + i\sin\omega t) \end{aligned} \tag{76}$$

これより、$v = \dfrac{dei\omega t}{dt} = A \cdot i\omega t \cdot ei\omega t$ として求めることもできる。$v = \dfrac{dy}{dt} = A\omega(-\cos\omega t + i\sin\omega t)$

このように実数部分と虚数部分をそれぞれ微分することをまとめて扱うことができる手法がオイラーの定理である。物理では、波動（波）や電磁気学の領域で使われる重要な項目になる。

これは、数学の微積分の問題にも応用でき、うまい解答（別解）を見つけることができる。例えば、$\int e^{3x}\sin 2x dx$ を求める問題である。数学で習った方法では、部分積分を２回当てはめる方法である。

$$e^{3x}\sin 2x \quad = \quad e^{(3x+2i)x} \text{ の虚数部分} \tag{77}$$

だから、

$$\int e^{(3+2i)x}dx \qquad \text{の虚数部} \tag{78}$$

に相当する。これより、複素指数関数の積分を行って求めると、

$$\begin{aligned} &\int e^{(3+2i)x}dx = \frac{1}{3+2i}e^{(3+2i)x} \\ &= \frac{3-2i}{5}e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x) \end{aligned} \tag{79}$$

だから、

$$\int e^{3x}\sin 2xdx \quad = \quad \frac{1}{5}\cdot e^{3x}\cdot(2\sin 2x + 3\cos 2x) \tag{80}$$

A.3 変数分離が使えない微分方程式

変数分離が使えない微分方程式にはうまい方法で解けるものもあれば、高等数学を使っても解けない微分方程式も存在する。微分方程式がすべて解けるなら、物理学はすべてを解明することが出来るのだが、微分方程式が解けない物理現象の方が多いようだ。数学の力をつけてどこまでこれらの微分方程式を解けるかが物理の理解につながる。微分方程式はずっと奥が深い世界なのです。

[14]数学の大家

B 練習問題解答

練習1

直線ＰＡの傾きは $\dfrac{y-a}{x-0}$、接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}$ だから、直交するとき、両者の積は -1 だから

$$\boxed{\text{微分方程式}} \qquad \frac{dy}{dx} \times \frac{y-a}{x-0} = -1 \tag{81}$$

変数分離して、積分すると、

$$\int y - a\, dy = -\int x\, dx$$

よって、

$$\frac{1}{2}y^2 - ay = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

式を整理すると、

$$x^2 + (y-a)^2 = 2C + a^2$$

原点を通るのでこれを代入して、$C = 0$ だから、

$$\boxed{\text{答}} \qquad x^2 + (y-a)^2 = a^2 \tag{82}$$

やはり円だった。想像した通りだ。

練習2

時刻 t のときにタンクの底から水が出てゆく速さ v は、エネルギー保存の法則より、$mgh = \dfrac{1}{2}mv^2$ だから、$v = \sqrt{2gh}$ になる。これより、時間 Δt にタンクから出てゆく水の量は $\Delta V = -\pi r^2 \times v$ であるので、

$$\begin{aligned} \pi R^2 \cdot \Delta h &= -\pi r^2 \sqrt{2gh} \cdot \Delta t \\ \frac{\Delta h}{\Delta t} &= -\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2gh} \end{aligned} \tag{83}$$

これより、Δt が短い時間であるとすると

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2gh}$$

タンクの水面が下がって行く時間経過を表すこれが微分方程式である。「変数分離法」でこれを解くには、右辺と左辺に変数 h と t を分離すると

$$\frac{dh}{\sqrt{2gh}} = -\frac{r^2}{R^2}dt$$

両辺を積分して

$$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int -\frac{r^2}{R^2}dt$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\frac{r^2}{R^2}t + C$$

初期条件 $t = 0$ のとき、$h = H$ だから、

$$C = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\frac{r^2}{R^2}t + \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

両辺を 2 乗して h を求めると、時刻 t のときの水面の高さ h は

$$h = \frac{g}{2}\left(-\frac{r^2}{R^2}t + \sqrt{\frac{2H}{g}}\right)^2$$

よって、タンクから水が無くなるのは、

$$0 = \frac{g}{2}\left(-\frac{r^2}{R^2}t + \sqrt{\frac{2H}{g}}\right)^2$$

$$\frac{r^2}{R^2}t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$t = \frac{R^2\sqrt{2H}}{r^2\sqrt{g}}$$

である。

練習 3

時刻 t のとき、コンデンサーを充電する電流が I であった。Δt の短い時間でコンデンサーに充電する電気量は $\Delta Q = I \cdot \Delta t$ である。このときのコンデンサーの電圧上昇が ΔV であるとすると、コンデンサーの電気量の増加は $\Delta Q = C \cdot \Delta V$ である。また、電圧の関係より $V_0 = V + Ir$ だから、$I = \dfrac{V_0 - V}{r}$ になる。以上より、

$$\frac{V_0 - V}{r} \cdot \Delta t = C \cdot \Delta V$$

これを変数分離して整理すると、

$$\Delta t = \frac{Cr \cdot \Delta V}{V_0 - V}$$

両辺積分して、初期条件を代入する。

$$\begin{aligned}\int_0^t dt &= \int_0^{V_t} \frac{Cr}{V_0 - V} \cdot dV \\ t &= \int_0^{V_t} \frac{Cr}{V_0 - V} \cdot dV \\ &= \int_0^{V_t} \frac{Cr}{V_0 - V} \cdot dV\end{aligned}$$

ここで、$X = V_0 - V$ と置いて、積分変数を置換すると、

$$\begin{aligned}t &= -\int_{V_0}^{V_0 - V_t} \frac{Cr}{X} \cdot dX \\ &= -Cr \cdot \log X \Big|_{V_0}^{V_0 - V_t} \qquad (84)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t &= -Cr \cdot \log X \Big|_{V_0}^{V_0 - V_t} \qquad (85) \\ &= -Cr \cdot \log \frac{V_0 - V_t}{V_0} \qquad (86)\end{aligned}$$

よって、時刻 t におけるコンデンサーの両端の電圧は

$$V_t = V_0(1 - e^{-\frac{1}{Cr}t}) \qquad (87)$$

練習 4

前問より、時刻 t におけるコンデンサーの両端の電圧は

$$V_t = V_0(1 - e^{-\frac{1}{CR}t}) \qquad (88)$$

時刻 t のとき、コンデンサーを充電する電流が I とすると、抵抗の電圧は $V_0 - V_t$ であるから、抵抗で消費される電力は

$$P_t = \frac{\left(V_0 \cdot e^{-\frac{1}{CR}t}\right)^2}{R} \qquad (89)$$

したがって、Δt の間の消費電力量は $P_t \cdot \Delta t$ になる。充電開始から充電終了までに消費する電力量の合計は

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty P_t dt \qquad (90) \\ &= \int_0^\infty \frac{(V_0 \cdot e^{-\frac{1}{CR}t})^2}{R} dt \\ &= \frac{{V_0}^2}{R} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2}{CR}t} dt \\ &= \frac{{V_0}^2}{R} \cdot \left(-\frac{CR}{2}\right) \cdot e^{-\frac{2}{CR}t}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} C{V_0}^2 \qquad (91) \end{aligned}$$

以上より、抵抗で消費される電力量とコンデンサーに蓄えられている静電エネルギー $U = \frac{1}{2}C{V_0}^2$ に等しいことが確かめられた。

練習 5

時刻 t のとき、コイルに流れる電流値を I とする。コイルに発生する誘導起電力は $V = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ だから、キルヒホッフの法則より、次のような関係式が成立する。

$$V_0 - L \cdot \frac{dI}{dt} = I \cdot R \qquad (92)$$

変数分離すると、

$$dt = \frac{L \cdot dI}{V_0 - I \cdot R}$$

両辺積分すると

$$\begin{aligned} t + C &= \int \frac{L}{V_0 - I \cdot R} dI \\ &= -\frac{L}{R} \log |V_0 - I \cdot R| \\ e^{-\frac{R}{L}\cdot(t+C)} &= |V_0 - I \cdot R| \qquad (93) \end{aligned}$$

初期条件 $t = 0$ のとき、$I = 0$ を代入して

$$e^{-\frac{R}{L}C} = V_0 \qquad (94)$$

初期条件から求めた式を使って積分定数を消去すると

$$\begin{aligned} V_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} &= |V_0 - I \cdot R| \\ I &= \frac{V_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) \end{aligned} \tag{95}$$

練習 6

雨粒に働く力は、下向きに重力が mg、上向きに抵抗力が kv だから、下向きを正として運動方程式を作ると $ma = mg - kv$ である。また、速度を時間 t で微分したものが加速度だから $a = \dfrac{dv}{dt}$ とかける。以上の 2 式より、雨粒が落下するときの運動を表す微分方程式は次のようになる。

$$\frac{dv}{dt} = mg - kv \tag{96}$$

この微分方程式を解くには、変数分離の形に変形して、両辺を積分をとると

$$\begin{aligned} \frac{dv}{mg - kv} &= dt \\ \int \frac{dv}{mg - kv} &= \int dt \end{aligned}$$

積分を計算すると、

$$\left[-\frac{1}{k} \log |mg - kv| \right] = t + C$$

対数を外し、指数関数で表現すると、

$$|mg - kv| = e^{-kt-kC}$$

境界条件として、時刻 $t = 0$ のとき、$v = 0$ とすると、

$$|mg| = e^{-kC} \tag{97}$$

これを代入して積分定数 C を消去すると、

$$|mg - kv| = mg \cdot e^{-kt}$$

雨粒は次の式で表されるような落下速度で落ちてくる。

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \tag{98}$$

十分時間がたった（ $t = \infty$ ）とき、雨粒の速度は $v_\infty = \dfrac{mg}{k}$ である。

練習７

振り子の長さを l、質量を m とする。また、時刻 t のときの、位置を x、鉛直線からの傾きの角度を θ、速度を v とし、このときの振り子のおもりの運動方程式を作る。　振り子に働く力は、おもりの重力 mg、糸の張力 T、水の抵抗力[15] kv の 3 力だ。振り子の振れ角は小さいものとすると、$\theta \approx 0$ であるから、$\sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta \approx 1$ であり、また、$\theta \approx \frac{x}{l}$ である。以上より、おもりに働く力は

$$\begin{aligned} f &= -mg\sin\theta - kv\cos\theta \\ &\approx -mg \cdot \frac{x}{l} - kv \end{aligned} \tag{99}$$

これより、おもりの加速度を a とすると、運動方程式を作ると、

$$\begin{aligned} ma &= -mg\sin\theta - kv\cos\theta \\ &\approx -mg \cdot \frac{x}{l} - kv \end{aligned} \tag{100}$$

いつもの様に、速度は位置の時間微分に等しいから $v = \frac{dx}{dt}$、加速度は速度の時間微分、位置の 2 次微分に等しいから $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ であることを用いて微分方程式を作成すると

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \cdot \frac{x}{l} - k \cdot \frac{dx}{dt} \tag{101}$$

になる。この微分方程式を解けばよいのですが、通常の変数分離法で計算することは出来ません。なぜなら、2 次微分の項があるからである。

この方程式の解を $x = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \gamma)$ であるとする。(なぜこのような式にするか？それは経験だよ)

$$x = A \cdot e^{\alpha \cdot t}\sin(\beta \cdot t + \gamma) \tag{102}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \alpha e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t + \gamma) + A \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \beta\cos(\beta \cdot t + \gamma) \tag{103}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \\ &= A\alpha^2 e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t + \gamma) + A\alpha e^{\alpha \cdot t} \cdot \beta\cos(\beta \cdot t + \gamma) \\ &\quad + A\alpha e^{\alpha \cdot t} \cdot \beta\cos(\beta \cdot t + \gamma) - A \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \beta^2\sin(\beta \cdot t + \gamma) \\ &= A(\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t + \gamma) + 2A\alpha\beta \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t + \gamma) \end{aligned} \tag{104}$$

以上の式 (102)、(103)、(104) を微分方程式 (101) に代入して、定数 α、β を求めると (初期位相 γ は初期条件により定まるので、ここでは気にしない)、

$$\begin{aligned} &\{m(\alpha^2 - \beta^2) + \frac{mg}{l} + k\alpha\}A \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t + \gamma) \\ &\quad + \{k\beta + 2m\alpha\beta\}A \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t + \gamma) = 0 \end{aligned} \tag{105}$$

[15]固体同士の摩擦力による抵抗（動摩擦力）は速度に依存しない（一定になる）。一方、流体の中での抵抗力は、速度が小さいとき速度に比例するすることが知られている。

式 (105) が常に成立するには、次の式が成立する。

$$
\begin{aligned}
m(\alpha^2-\beta^2)+\frac{mg}{l}+k\alpha &= 0 \\
k\beta+2m\alpha\beta &= 0 \qquad (106)
\end{aligned}
$$

式 (106) より、$\alpha=-\dfrac{k}{2m}$ であることが分かる。これを (106) に代入して、

$$
\begin{aligned}
m\left(\frac{k^2}{4m^2}-\beta^2\right) & \qquad (107)\\
+\frac{mg}{l}-k\frac{k}{2m} &= 0 \qquad (108)\\
\beta=\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}} & \qquad (109)
\end{aligned}
$$

よって、求める解は、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
x &= A\cdot e^{-\frac{k}{2m}\cdot t}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\cdot t+\gamma\right) \qquad (110)\\
v &= -\frac{Ak}{2m}\cdot e^{-\frac{k}{2m}\cdot t}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\cdot t+\gamma\right)\\
&\quad +A\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\cdot e^{-\frac{k}{2m}\cdot t}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\cdot t+\gamma\right) \qquad (111)
\end{aligned}
$$

手を離したときを $t=0$ とし、そのときの位置は $x=x_0$ 、速度は $v=0$ であったとする（これを初期条件という）。これを式 (110)、(111) に代入して、

$$
\begin{aligned}
x_0 &= A\sin\gamma \qquad (112)\\
0 &= -\frac{Ak}{2m}\cdot\sin\gamma+A\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\cdot\cos\gamma
\end{aligned}
$$

式 (112) を (113) に代入して、

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{k}{2m}\cdot A\sin\gamma+\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\cdot A\cos\gamma\\
\tan\gamma &= \frac{2m}{k}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}} \qquad (113)
\end{aligned}
$$

式 (113) を満たす角を γ とすればよい。また、$A=\dfrac{x_0}{\sin\gamma}$ である。これで微分方程式を満たす関数の形が決定する。

$$
\tan\gamma_0=\frac{2m}{k}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}} \qquad (114)
$$

を満たす γ_0 を用いて

$$x = \frac{x_0}{\sin\gamma_0} \cdot e^{-\frac{k}{2m}\cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}} \cdot t + \gamma_0\right) \tag{115}$$

$\boxed{\text{練習 8}}$ 電流の大きさと位相のずれを求めてみよう。また、インピーダンス（交流に対する抵抗成分）も求めてみよう。　コイルの電圧は $V_L = -L \cdot \dfrac{dI}{dt}$、コンデンサーの電圧は $V_C = \dfrac{Q}{C}$、抵抗の電圧は $V_R = IR$ であるので、直列接続したときの全体の電圧は $V = V_L + V_C + V_R$ であるから、次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} V &= L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR \\ Q &= \int_0^t I dt \\ V &= V_0 \cdot \sin 2\pi f t \end{aligned} \tag{116}$$

、

上の関係式の両辺を時間 t で微分してやると、

$$2\pi f V_0 \cdot \cos(2\pi f t) = -L \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} + R\frac{dI}{dt} \tag{117}$$

この微分方程式は、２次微分を含むもので、２階微分方程式という。変数分離法は使えないので、テクニックを使わざるを得ない。電流 I の形は $I = I_0 \sin(2\pi f t + \delta)$ と仮定しよう（I_0 と δ が未知数）。これを上の微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned} 2\pi f V_0 \cdot \cos(2\pi f t) &= -4\pi^2 f^2 L I_0 \sin(2\pi f t + \delta) \\ &\quad + \frac{I_0}{C}\sin(2\pi f t + \delta) \\ &\quad + 2\pi f R I_0 \cos(2\pi f t + \delta) \\ &= \left(\frac{1}{C} - 4\pi^2 f^2 L\right) \cdot I_0 \sin(2\pi f t + \delta) \\ &\quad + 2\pi f R \cdot I_0 \cos(2\pi f t + \delta) \end{aligned} \tag{118}$$

三角関数の合成公式を使ってひとつにまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} 2\pi f V_0 \cdot \sin(2\pi f t) &= \sqrt{\left(\frac{1}{C} - 4\pi^2 f^2 L\right)^2 + (2\pi f R)^2} \cdot I_0 \cos(2\pi f t + \delta + \Delta) \\ \tan\Delta &= \frac{\frac{1}{C} - 4\pi^2 f^2 L}{2\pi f R} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi f C} - 2\pi f L}{R} \end{aligned}$$

C　この文書のソースリスト

参考のために、この文書の TEX ソースリストを末尾に添付しております。

索 引