電磁気学分野(コンデンサー)での微積分法

コンデンサーの定義　コンデンサーは電荷をためる電気部品である。 蓄えられる電気量を Q [C]、コンデンサーに加えた電圧 V [V]、コンデンサーの電気容量 C [F]であるとすると、コンデンサーの公式 $Q=CV$ の関係が成立する。

コンデンサーに蓄えられるエネルギー

1　電荷を運ぶときの仕事の量は　$W = qV$で定義されることから、V [V]の電圧のコンデンサーに$\varDelta q$ [C]の電荷を追加するのに必要な仕事の量は　$\varDelta W = \varDelta qV$である。

2　コンデンサーに蓄えられている電気量は　$q=CV$ だから、コンデンサーの電圧は　$V=\dfrac{q}{C}$ である。

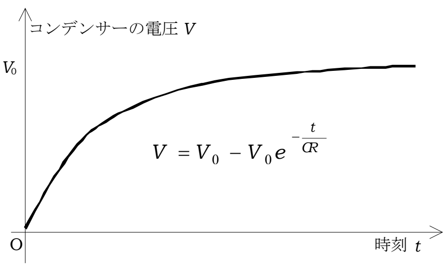
証明　微少電荷 dq [C]を運ぶときのわずかな仕事 dW [J]とすると、①より、$dW=\dfrac{q}{C}dq$ である。コンデンサーにはじめは電荷がなかった状態から、電気量を Q [C]まで蓄える場合、両辺を積分して、$\int dW=\int_0^Q \dfrac{q}{C}dq$ だから、$W=\dfrac{1}{C}\left[\dfrac{1}{2}q^2\right]_0^Q=\dfrac{Q^2}{2C}$ である。 これにコンデンサーの公式を代入して変形すると、

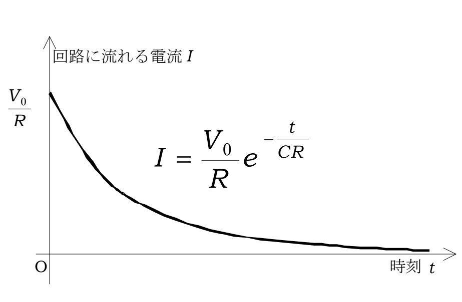
コンデンサーに蓄えられてエネルギーは　$W=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}=\dfrac{1}{2}QV=\dfrac{1}{2}CV^2$ と表せる。

コンデンサーの充電過程の電流、電圧の変化　 コンデンサーに充電する途中の状態を計算してみよう。

起電力が V_0 [V]の電池に抵抗 R [Ω]の抵抗を介して電気容量 C [F]のコンデンサーをつないだ。そのときの時刻を t =0 とする。時刻 t のとき、コンデンサーの電圧が V [V]、そのときの電流が I [A]とする。

オームの法則より、$V_0-V=IR$ …① が成立する。 また、このときコンデンサーの電気量は　$Q=CV$ …② である。Δt [s]間にコンデンサーに流れ込む電気量は　$\Delta q=I\Delta t$ …③ より、Δt [s]後のコンデンサーの電圧を $V+\Delta V$ とすると　$Q+\Delta q=C(V+\Delta V)$… ④　より、$\Delta V=\dfrac{V_0-V}{CR}\Delta t$ であるので、$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{V_0-V}{CR}$ …⑤　の微分方程式が成り立つ。$V_0-V=Y$ とすると、⑤式は　$\dfrac{dY}{dt}=-\dfrac{1}{CR}Y$ だから、変数分離して　$\dfrac{1}{Y}dY=-\dfrac{1}{CR}dt$　である。両辺積分して、$\int \dfrac{1}{Y}dY=\int -\dfrac{1}{CR}dt$　だから、$\log|Y|=-\dfrac{t}{CR}+C'$　（C'は積分定数）である。元の変数に戻して変形すると、$V_0-V=e^{-\frac{t}{CR}+C'}$ が成立する。時刻 t =0 のとき、コンデンサーの電圧は　V=0　であるので、$V_0=e^{C'}$ だから、$V=V_0-V_0e^{-\frac{t}{CR}}$ [V] である。 グラフで示すと右の図のようになる。





また、そのとき回路に流れる電流は　$I=\dfrac{V_0e^{-\frac{t}{CR}}}{R}$ [A] になる。（なお、つないだ直後の電流値は t=0 より、$I_0=\dfrac{V_0}{R}$ [A] になる。）