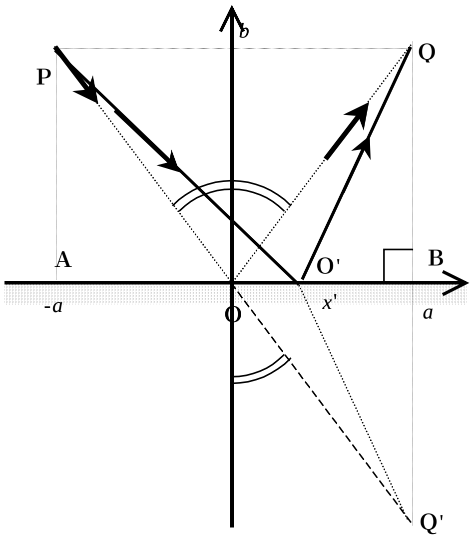
物理プリント（反射・屈折の挑戦編）解説

反射の法則　証明（「波は最短時間のコースを通る」を使って）

幾何学による方法（三角形の2辺の和は他の一辺より長い）

反射面　AOB　に対して、点Q　の対称点をQ'　とする。⊿QO'Bと⊿Q'O'B　において、対応する2辺が等しい直角三角形は合同である。したがって、対応する辺の長さは同じになるので、O'QとO'Q'　は等しい。したがって、PO'＋O'Q＝PO'＋O'Q　になる。また、∠QOB＝∠Q'OBである。したがって、POQ'は直線になる。したがって、⊿PQ'O'　において、三角形の二編の和は他の一辺より長いことから、PO'＋O'Q'＞PQ'＝POQ　である。したがって、最短コースは　POQであることが分かる。したがって、入射角と反射角は等しい。



数式による方法（微積分による方法）

速さが同じなので最短時間のコースは最短距離であればよい。したがって、PO'Q　のコースの長さを最小とする　O'を求めれば良い。　ピタゴラスの定理（三平方の定理）より $\mathrm{PO'}=\sqrt{(x+a)^2+b^2}$ 、$\mathrm{QO'}=\sqrt{(x-a)^2+b^2}$

だから、コースの長さを y とすると、

$y=\mathrm{PO'}+\mathrm{QO'}=\sqrt{(x+a)^2+b^2}+\sqrt{(x-a)^2+b^2}$ だ。

y を x の関数として最小値求めるために関数 y を微分する。

また、$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であるので、y を x で微分すると、$y'=\dfrac{\left((x+a)^2+b^2\right)'}{2\sqrt{(x+a)^2+b^2}}+\dfrac{\left((x-a)^2+b^2\right)'}{2\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$ だから、

これを整理して、$y'=\dfrac{(x+a)}{\sqrt{(x+a)^2+b^2}}+\dfrac{(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}=\dfrac{(x+a)\sqrt{(x-a)^2+b^2}+(x-a)\sqrt{(x+a)^2+b^2}}{\sqrt{(x+a)^2+b^2}\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$

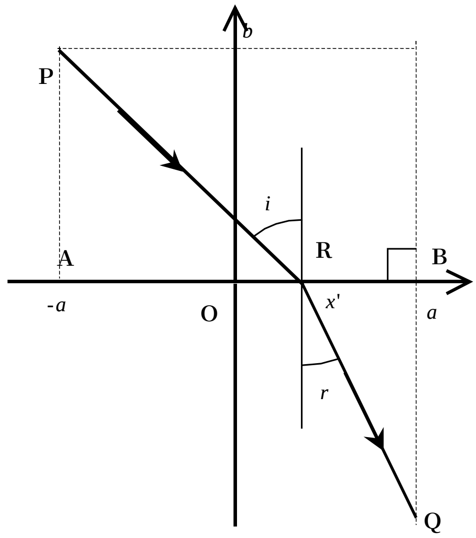
分母は常に正であるので、分子のみを取り出すと、　$A=(x+a)\sqrt{(x-a)^2+b^2}+(x-a)\sqrt{(x+a)^2+b^2}$

$$A=\frac{(x+a)^2\left\{(x-a)^2+b^2\right\}-(x-a)^2\left\{(x+a)^2+b^2\right\}}{(x+a)\sqrt{(x-a)^2+b^2}-(x-a)\sqrt{(x+a)^2+b^2}}=\frac{4ab^2x}{(x+a)\sqrt{(x-a)^2+b^2}-(x-a)\sqrt{(x+a)^2+b^2}}$$

ここで、図より、x の変域は　$-a<x<a$ として一般性を失わないので、最後に示した A の分母は常に正になる。したがって、関数 y の増減表は右のようになり、最小値は $x=0$ のところになる。したがって、入射角 i と反射角 r は等しくなる。（$\sin i=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$、$\sin r=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるので、$\sin i=\sin r$ だから、$i=r$　になる。）

x	$x<0$	0	$0<x$
y'	−	0	＋
y	減少	最小値	増加

物理プリント（屈折の挑戦編） 解説



屈折の法則 証明（「波は最短時間のコースを通る」を使って）

$y>0$ での速度 v_1、$y<0$ での速度 v_2 とする。

PRの距離は $\sqrt{(a+x)^2+b^2}$、RQの距離は $\sqrt{(a-x)^2+b^2}$ だから、$T=\dfrac{\sqrt{(a+x)^2+b^2}}{v_1}+\dfrac{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}{v_2}$ で光がPからQに達する。R点の位置を変化させたときにこれが最小になればよい（[フェルマーの原理] 波は最短時間のコースを通る）。x で微分するとから、$T'=\dfrac{(a+x)v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}-(a-x)v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}{v_1v_2\sqrt{(a+x)^2+b^2}\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$

より、微分係数ゼロのとき（最大？最小？）は $(a+x_0)v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}-(a-x_0)v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}=0$

のとき極値だから、$\dfrac{\left\{\dfrac{(a+x_0)}{\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}}\right\}}{\left\{\dfrac{(a-x_0)}{\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}}\right\}}=\dfrac{\sin i}{\sin r}=\dfrac{v_1}{v_2}$ とかける。これは、スネルの法則（屈折の法則）

$\dfrac{\sin i}{\sin r}=\dfrac{v_1}{v_2}$ に一致しているので、このとき最小値であることを示せば証明は終わる。ここで、$X>0$ の領域で $F(X)=\dfrac{X}{C\sqrt{X^2+B^2}}$ （$C>0$）の関数を考える。$F(X)=\dfrac{1}{C\sqrt{1+\left(\dfrac{B}{X}\right)^2}}$ とかけるので、X が増加するにつれて分母が減少する。したがって、$F(X)=\dfrac{X}{C\sqrt{X^2+B^2}}$ は単調増加関数である。したがって、$x<x_0$ のとき $\dfrac{a+x}{v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}<\dfrac{a+x_0}{v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}}$、$\dfrac{-a+x}{v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}}<\dfrac{-a+x_0}{v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}}$ だから、

$$T'=\frac{2a+2x}{2v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}+\frac{-2a+2x}{2v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}}<\frac{a+x_0}{v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}}+\frac{-a+x_0}{v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}}=0$$

$x\geq x_0$ のとき $\dfrac{a+x}{v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}\geq\dfrac{a+x_0}{v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}}$、$\dfrac{-a+x}{v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}}\geq\dfrac{-a+x_0}{v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}}$ だから、

$$T'=\frac{2a+2x}{2v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}+\frac{-2a+2x}{2v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}}\geq\frac{a+x_0}{v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}}+\frac{-a+x_0}{v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}}=0$$ より、

$x<x_0$ のとき、減少、$x\geq x_0$ のとき増加するので、$x=x_0$ のとき最小値をとることを示している。