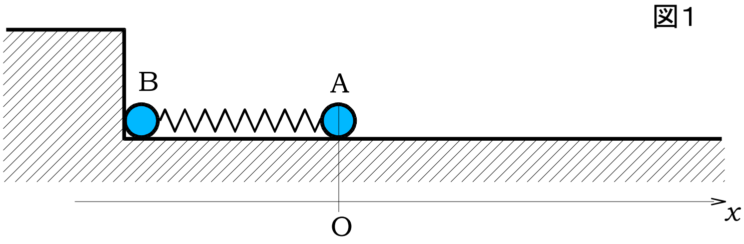
ばねで連結された2つの物体の運動の考察　～ 運動方程式だけを使った解法への挑戦 ～

「入試問題研究 第109回　2003年度 東北大学　後① 力学(単振動応用)」より

図1



図Ⅰのように、垂直な壁に摩擦のない水平面が接しており、その上に質量 m_A と m_B の小球AとBが置かれている。AとBはばね(ばね定数 k 、自然長 l_0)で連結されており、壁に垂直な x 軸上を動く。

はじめ、Aは $x=0$ の位置に、Bは壁に接して置かれ、ばねの長さは自然長であった。この状態から、図1のようにAを距離 d だけ手で押してばねを縮め、静止させた後、静かに手を離した。

「手を離した後、Aが初めて $x=0$ の位置を通過した時刻($t=0$ とする)におけるAの速さは v_0 であった。その後、AとBの重心は速さ v_G の等速運動を行った。さらに、ばねの長さの時間変化を測定したところ、時刻 $t=t_1$ に初めてばねの長さが最大になった。」(カッコ部分の v_0 、 v_G 、 t_1 などは仮定された部分)

壁は変形しないものとし、AとBの大きさとばねの質量は無視できるものとして、以下の問いに答えなさい。ただし、結果だけでなく、考え方や計算の過程も書きなさい。

[解説] 問題分の仮定された部分も含めて、この運動を運動方程式だけから正確に解析してみよう。

Ⅰ. 小球Bが壁に接して動かず、小球Aだけが動く「前半部分」から考えてみよう。

最初は、小球A、Bの運動方程式を作ることからはじめる。小球Aの位置を x_A とすると、ばねの力は $f=-kx_A$ であるから、小球Aの運動方程式は $m_A a_A=-kx_A$ になる。よって、 $a_A=-\dfrac{k}{m_A}\cdot x_A$ であるので、 $x_A=0$ を中心に角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}$ の単振動になる。よって、周期は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_A}{k}}$ である。

手を離した時刻を $t=0$ として、初期位相を求めてみよう。 単振動の公式より位置は $x_A=A\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}\cdot t+\delta\right)$ 、速度は $v_A=A\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}\cdot t+\delta\right)$ である。ここで、初期条件は、 $t=0$ のとき $x_A=-d$ 、 $v_A=0$ であるから、初期位相 $\delta=-\dfrac{\pi}{2}$ 、振幅 $A=d$ であることがわかる。

よって、時刻 t のとき、小球Aの位置 $x_A=-d\cos\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}\cdot t$ 、速度 $v_A=d\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}\cdot t$ になる。

また、原点を通過する小球Aの速度は $v_0=d\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}$ になる。(ここまでは基本的問題で簡単だ!)

Ⅱ. 小球Bが壁から離れて、小球A、Bともに動きだす「後半部分」を考えてみよう。

後半部分では、小球Aが原点を通過したときを時刻ゼロとする(前半部分(Ⅰ)の解とは異なる定義)。それぞれの位置を x_A 、 x_B とする。小球A、Bの運動方程式を作ってみる。

ばねの長さは x_A-x_B になるので、ばねの力の大きさはばねの伸び $x_A-x_B-l_0$ に比例する。

以上より、小球A、Bの運動方程式は、小球Aが $m_A a_A=-k(x_A-x_B-l_0)$ ・・・①、小球Bが

$m_B a_B = k(x_A - x_B - l_0)$ ・・・② である。（この2つの運動方程式が基本となるのだ！）

また、重心の公式より、位置は $x_G = \dfrac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$ ・・・③ である。また、速度を時間で微分すると速度になるので、重心の速度は $v_G = \dfrac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$ ・・・④、また、速度を時間で美便すると加速度になるので、重心の加速度は $a_G = \dfrac{m_A a_A + m_B a_B}{m_A + m_B}$ ・・・⑤ になる。（③、④、⑤の証明も簡単ですよ！）

運動方程式①、②を辺々足し算すると、 $m_A a_A + m_B a_B = 0$ になる。これを ⑤式に代入すると、重心の加速度がゼロになることがわかる。よって、加速度ゼロ、すなわち速度が定数（一定）になり、重心の速度は v_G として良いのだ。（問題文にある「重心は等速運動する」の仮定が証明された！）

初期条件として、 $t=0$ のとき、 $v_A = v_0$ であるので、これを③、④に適用すると、重心の速度は $v_G = \dfrac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \dfrac{m_A v_0}{m_A + m_B}$ 、重心の位置は $x_G = \dfrac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = v_G t - \dfrac{m_B l_0}{m_A + m_B}$ である。

小球Aについて、運動方程式を解いてみよう。

①、③を用いて x_B を消去すると、 $m_A a_A = -k x_A + k\left\{\dfrac{(m_A + m_B)x_G - m_A x_A}{m_B}\right\} + k l_0$ が得られる。両辺の分母を払って $m_A m_B a_A = -k m_B x_A + k(m_A + m_B)x_G - k m_A x_A + k m_B l_0$ が得られる。

ここで、重心の加速度はゼロ（ $a_G = 0$ ）より、 $a_A - a_G = -\dfrac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}\left\{x_A - x_G - \dfrac{m_B l_0}{m_A + m_B}\right\}$ と表すことができ、重心から見た小球Aの加速度は $a = -\dfrac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}\left\{x - \dfrac{m_B l_0}{m_A + m_B}\right\}$ （xは重心を原点とした位置）。

よって、重心から見た小球Aの運動は、重心から正方向へ $\dfrac{m_B l_0}{m_A + m_B}$ ずれた位置を中心として、角振動数が $\omega = \sqrt{\dfrac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}}$ の単振動になることがわかる。 単振動の位置、速度の公式より、位置、速度は、

$x = A_A \sin\left(\sqrt{\dfrac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}} \cdot t + \delta_A\right) + \dfrac{m_B l_0}{m_A + m_B}$ 、 $v = A_A \sqrt{\dfrac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}} \cos\left(\sqrt{\dfrac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}} \cdot t + \delta_A\right)$ である。

初期条件（ $t=0$ のとき $x = \dfrac{m_B l_0}{m_A + m_B}$ 、 $v = v_0 - v_G = v_0 - \dfrac{m_A v_0}{m_A + m_B} = \dfrac{m_B v_0}{m_A + m_B}$ ）を適用して求めると、

初期位相 $\delta = 0$ 、振幅 $A_A = \dfrac{m_B v_0}{m_A + m_B}\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{k(m_A + m_B)}}$ である。以上より、原点Oから見た小球Aの位置を求めると $x_A = A_A \sin\sqrt{\dfrac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}}t + \dfrac{m_B l_0}{m_A + m_B} + \left(v_G t - \dfrac{m_B l_0}{m_A + m_B}\right) = A_A \sin\sqrt{\dfrac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}}t + v_G t$ となる。これをグラフに描けばよい（単振動しながらx軸正の向きに進む）。

小球Ｂについても、小球Ａのときと同様に計算してやればよい。（小球Ａのときとまったく同じ過程を行うだけ）

②、③より x_A を消去すると、 $m_B a_B = k\left\{\dfrac{(m_A+m_B)x_G - m_B x_B}{m_A}\right\} - k x_B - k l_0$ になる。分母を払って

$m_A m_B a_B = k(m_A+m_B)x_G - k m_B x_B - k m_A x_B - k m_A l_0$ が得られる。

ここで、 $a_G=0$ より、これを整理して $a_B - a_G = -\dfrac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}\left\{x_B - x_G + \dfrac{m_A l_0}{m_A+m_B}\right\}$ と表すことができ、重心から小球Ｂを見たとき、 $a = -\dfrac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}\left\{x + \dfrac{m_A l_0}{m_A+m_B}\right\}$ になる。（手順はまったく同じだ！）

よって、単振動の公式より、重心から見た小球Ｂの運動は、重心から負の向きに $\dfrac{m_A l_0}{m_A+m_B}$ ずれた位置を中心として、角振動数が $\omega = \sqrt{\dfrac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}}$ の単振動になることがわかる。 単振動の位置、速度の公式より、$x = A_B \sin\left(\sqrt{\dfrac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}} \cdot t + \delta_B\right) - \dfrac{m_A l_0}{m_A+m_B}$ 、 $v = A_B\sqrt{\dfrac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}} \cdot t + \delta_B\right)$ だ。

初期条件（ $t=0$ のとき $x = -\dfrac{m_A l_0}{m_A+m_B}$ 、 $v = v_0 - v_G = 0 - \dfrac{m_A v_0}{m_A+m_B} = -\dfrac{m_A v_0}{m_A+m_B}$ ）より、初期位相 $\delta = \pi$ 、振幅 $A_B = \dfrac{m_A v_0}{m_A+m_B}\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{k(m_A+m_B)}}$ になる。よって、原点Ｏから見た小球Ｂの位置を求めると

$$x_B = -A_B \sin\sqrt{\frac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}}\,t - \frac{m_A l_0}{m_A+m_B} + \left(v_G t - \frac{m_B l_0}{m_A+m_B}\right) = -A_B \sin\sqrt{\frac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}}\,t + v_G t - l_0$$ である。

x_A 、 x_B の式より、ばねの長さは $l = x_A - x_B = (A_A + A_B)\sin\sqrt{\dfrac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}}\,t + l_0$ になる。

また、 $A_A + A_B = \dfrac{m_B v_0}{m_A+m_B}\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{k(m_A+m_B)}} + \dfrac{m_A v_0}{m_A+m_B}\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{k(m_A+m_B)}} = v_0\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{k(m_A+m_B)}}$ になるので、

ばねの長さは $l = l_0 + v_0\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{k(m_A+m_B)}}\sin\sqrt{\dfrac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}}\,t$ と表せる。よって、ばねの長さの最大値は、

$l = l_0 + v_0\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{k(m_A+m_B)}}$ である。 また、 $v_0 = d\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}$ を代入すると $l = l_0 + d\sqrt{\dfrac{m_B}{m_A+m_B}}$ とも書ける。

以上、「2003年度　東北大学の入試問題」を運動方程式だけからの完全解を示してきました。運動量保存の法則や力学的エネルギー保存の法則を使っていないので、計算が大変ですが、運動方程式だけでもこのように運動を解析することが出来てしまうのです。純粋に「ニュートンの物理学」に立ち戻った思考も大切になります。また、計算を終えたときの達成感が大きく、解けたときの楽しさも味わえるのです（感覚が鈍い人もいるようですが）。また、入試問題文中で書かれている物理量も全て計算の過程で求まってくるることも頭に留めておいて欲しいのです。入試問題は時間内に解けるように作っている、非現実的な設定なのです。

入試問題を解く「テクニック」にばかり走って、物理の本質を見逃してしまっている人も多いようです。このような人こそぜひ、このような計算に一度は挑戦して欲しいものです。ニュートンが主張する「すべての運度は『運動の法則』で語り尽くせるのだよ」ということを忘れないようにね。　（志）