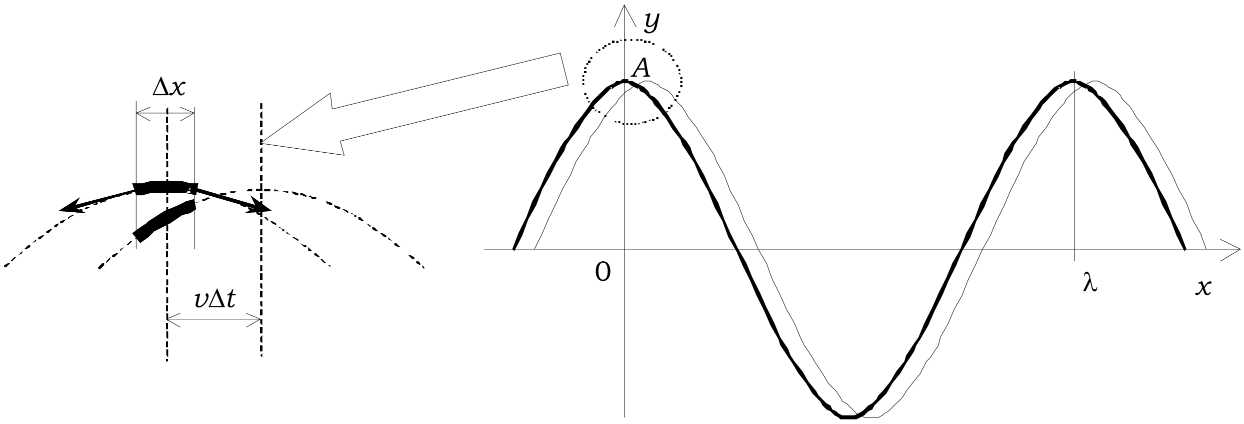
弦を伝わる波の速さ



弦の線密度が ρ [kg/m]、弦の張力が S [N] の弦を伝わる波がある。この波の波長は λ [m]、振幅は A [m]、弦を伝わる波の速さは v [m/s] である。上の図に示すように、時刻 t [s] の波が太線で示す位置におり、このとき、$x=0$ の位置に変位が正に最大である。この波が、時刻 $t+\Delta t$ [s] のときに細線の位置に移動した。このときの時間 Δt [s] の間に、弦の微小部分がどのように動いたかを考えてみることで、弦を伝わる波の速さの公式が $v=\sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$ になることを導いいてみよう。ただし、このとき、Δt は十分に短い時間を表し、x がゼロに近いとき、$\sin x \cong x$ 、$\cos x \cong 1-\dfrac{1}{2}x^2$ 、$\tan x \cong \sin x$ の近似式が成立する。

(1) 時刻 t のときの波を方程式で表しなさい。

弦の微小部分の長さを Δx とし、微小部分の中央を $x=0$ とする。

(2) 微小部分が Δt の間に y 軸方向の移動距離を図から求めなさい。（微小部分中央の移動を考えればよい）

次に、微小部分にかかる力を使って運動を計算してみよう。

(3) 微小部分にかかる力の y 成分を求めなさい。

Δt の間の微小部分の運動が等加速度運動であるとみなすと、この微小部分の運動が計算できる。

(4) 微小部分の y 軸方向の運動の運動方程式を作りなさい。

(5) 微小部分の加速度の y 軸方向成分を求めなさい。

(6) 微小部分の y 軸方向の移動距離を等加速度運動の公式を使って求めなさい。

(7) 弦を伝わる波の速さが $v=\sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$ になることを導きなさい。

弦を伝わる波の速さ

(1)　図より、$y = A\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}$ …① または、$y = A\sin\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}+\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)　波が Δt の間に $v\Delta t$ 進むので、微小部分が y 軸方向に移動する距離は、$\Delta y = A\cos\dfrac{2\pi\cdot v\Delta t}{\lambda} - A$ であるから、$\Delta y = -\dfrac{A}{2}\left(\dfrac{2\pi v\Delta t}{\lambda}\right)^2 = -\dfrac{2\pi^2 A v^2}{\lambda^2}(\Delta t)^2$ …② である。

(3)　微小部分にかかる張力は $x = \dfrac{1}{2}\Delta x$ での接線の向きになる。この接線と x 軸との角度を θ とすると、張力の y 軸方向成分は $S_y = S\sin\theta$ である。波の方程式（弦を表す関数）①より、$\dfrac{dy}{dx} = -A\sin\dfrac{2\pi x}{\lambda}\cdot\dfrac{2\pi}{\lambda} = -\dfrac{2\pi A}{\lambda}\sin\dfrac{2\pi x}{\lambda}$ である。また、$\dfrac{dy}{dx} = \tan\theta$ でもある。このとき、θ はゼロに近いので、近似式 $\tan\theta \cong \sin\theta$ が成立する。したがって、$S_y = S\times\left\{-\dfrac{2\pi A}{\lambda}\sin\left(\dfrac{2\pi A}{\lambda}\cdot\dfrac{\Delta x}{2}\right)\right\}$ であるから、$S_y = -\dfrac{2\pi^2 A^2 S\Delta x}{\lambda^2}$ になる。微小部分には張力が左右両方からかかるので、$F_y = -\dfrac{4\pi^2 A^2 S\Delta x}{\lambda^2}$

(4)　微小部分の質量は $m = \rho\Delta x$ だから、y 軸方向の運動方程式は $\rho\Delta x\cdot a_y = -\dfrac{4\pi^2 A^2 S\Delta x}{\lambda^2}$ である。

(5)　運動方程式 $\rho\Delta x\cdot a_y = -\dfrac{4\pi^2 A^2 S\Delta x}{\lambda^2}$ から、加速度は $a_y = -\dfrac{4\pi^2 A^2 S}{\lambda^2\rho}$ になる。

(6)　加速度は $a_y = -\dfrac{4\pi^2 A^2 S}{\lambda^2\rho}$ を、等加速度運動の公式 $x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$ に代入して、時間 Δt での移動距離を求めると、$\Delta y = 0(\Delta t) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{4\pi^2 A^2 S}{\lambda^2\rho}\right)(\Delta t)^2 = -\dfrac{2\pi^2 A^2 S}{\lambda^2\rho}(\Delta t)^2$ …③ だ。

(7)　$\Delta y = -\dfrac{2\pi^2 A v^2}{\lambda^2}(\Delta t)^2$ …②、$\Delta y = -\dfrac{2\pi^2 A^2 S}{\lambda^2\rho}(\Delta t)^2$ …③ だから、$-\dfrac{2\pi^2 A^2 v^2}{\lambda^2}(\Delta t)^2 = -\dfrac{2\pi^2 A^2 S}{\lambda^2\rho}(\Delta t)^2$ が成立する。両辺整理すると $v^2 = \dfrac{S}{\rho}$ になる。よって、弦を伝わる波の速さは $v = \sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$ である。