参考資料

微分方程式入門講座
〜数学からみた物理学〜

TEX ソースリスト

兵庫県立神戸高等学校
高田　広志

Ver.0.00　2002.08.08 (制作開始)
Ver.1.00　2002.12.26 (現在の PDF 文書は 22 ページ、187kB)
Ver.1.10　2002.12.30 (現在の PDF 文書は 26 ページ、197kB)

参考資料：TEX ソースリスト編

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%　微分方程式
%　物理からみた数学
%　　　高田　広志
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\documentclass[a5paper,11pt]{jarticle}

% 読み込みファイル制御：　TEX ファイル構成（読み込みファイル群）
\includeonly{
　微分方程式-intro % はじめに
  ,微分方程式-base % 第１章 基本編（復習）
  ,微分方程式-main % 第２章 本編
  ,微分方程式-exercise % 練習問題
  ,微分方程式-appendix % 追加資料と練習問題の解答
  ,微分方程式-src % ソースリスト
}

% スタイル定義読み込み
\usepackage{amsmath} %
\usepackage{plext} %
\usepackage{latexsym} %
\usepackage{amssymb} %
\usepackage{graphics} % Postscript 関係（EPS ファイルの扱い）
\usepackage{graphicx} % Postscript 関係（EPS ファイルの扱い）
\usepackage{fancybox} % 文字枠環境
\usepackage{multicol} % 段組割付環境
\usepackage{epsbox} % EPS 図挿入環境
\usepackage{ascmac} % 飾り枠環境 boxnote,shadebox,screen,itembox
\usepackage{enumerate} % 連番、箇条書き拡張 -> \begin{enumerate}[{問 1}]
\usepackage{makeidx} % インデックス作成
\usepackage[ % ハイパーリンクを自動作成
  unicode,%
  bookmarks,%
  bookmarksopen,%
  bookmarksopenlevel=0,% 0:リンクをすべてに張る，　1:
%  colorlinks % colorlinks = Default:ハイパーリンクを赤色文字＋下線
% コメントアウトで青文字＋下線
]{hyperref}[1999/08/31] % 6.65d or later

%
% If you want to print backslash instead of yen-mark,
%   please delete % character on top of the next line.
%\renewcommand{\yen}{{\tt\char"5C}}
%

\title{
```

```
  \Huge{微分方程式入門講座}\\
  \Large{～数学からみた物理学～}\\
}

\author{兵庫県立神戸高等学校\\高田　広志}

\date{
 {\small\flushleft{
  \hspace{2.5cm}PDF 文書\\
  \hspace{3cm}Ver.0.00\hspace{5mm}2002.08.08（制作開始)\\
  \hspace{3cm}Ver.1.00\hspace{5mm}2002.12.26（現在の PDF 文書は 22 ページ、187kB)\\
  \hspace{3cm}Ver.1.10\hspace{5mm}2003.01.06（現在の PDF 文書は 27 ページ、192kB)\\
  \vspace{5mm}
  \hspace{2.5cm}PDF ソース\\
  \hspace{3cm}Ver.1.10\hspace{5mm}2003.01.06（PDF ソースリスト 35 ページ、\ 94kB)\\
 }}
}
\vspace{20pt}


\topmargin-.7in%
\setlength{\oddsidemargin}{-.1in}
\setlength{\evensidemargin}{-.1in}
\setlength{\parindent}{0pt}
\textheight25cm%
\textwidth16cm%
\footskip30pt%


% ページ番号の書式設定
%\pagestyle{empty} % ページ番号なし
%\pagenumbering{roman} % ローマ数字小文字のページ番号付
%\pagenumbering{alpha} % 英字小文字のページ番号付
\pagenumbering{arabic} % 算用数字小文字のページ番号付


% 索引の抽出を行なう（makeidx.sty が必要）
% mndex による抽出後、再 TeX コンパイル必要
\makeindex


\begin{document}

%-------------------------------
%　タイトル部の作成
%-------------------------------
\maketitle
```

```
%--------------------------------
%  もくじ部の作成
%--------------------------------
\tableofcontents

%--------------------------------
%  文書内容記述部（本文）
%--------------------------------

\include{微分方程式-intro} % はじめに
\include{微分方程式-base} % 基本編（微積分法復習）
\include{微分方程式-main} % 本編
\include{微分方程式-exercise} % 基本編（微積分法復習）

\include{微分方程式-appendix} % 追加資料編


%--------------------------------
% 索引を作成  （末尾に入れる）
%--------------------------------
\printindex

\end{document}
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%　微分方程式
%　物理からみた数学
%
%　　　「はじめに」
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\section{はじめに}
　一般の物体の運動において、
高校で学習した等加速度運動だけで表される単純な運動に限らない。
摩擦力、空気抵抗など、その他の要素が加わるため、
運動方程式は複雑になり、運動方程式そのものは作ることが出来る。
しかし、その運動方程式を解くことが高校数学のレベルでは出来なくなる。
これは高校で習った数学の知識が
運動方程式を解くために必要な数学のレベルに達していないためである。
高校の数学のレベルを超えるけれども、
微分方程式を解くために必要な数学 (微積分学) を学習しさえすれば、
このような運動方程式でも解けるようになる。
現実の複雑な運動についても、運動方程式を作り、それを解くことによって
運動の様子を詳しく解析することが出来るようになる。
また、コンピュータを利用してより複雑な微分方程式の場合も計算することができる。

数学と物理は表裏一体の学問である。
数学の力が豊かになるにつれて、物理の理解度が深まることは間違いない。
また、物理の知識が数学のより深い理解につながることが多い。

　この講義では、物理学の理解を深めるとともに、
数学のレベルアップを図ることを目的として、
物理学の立場から、勝手気ままに数学の発展分野（微積分学の拡張）を進めてゆく。

　数学の教科書のように厳格な定義・証明として扱うわけでなく、
実用本位の微積分法としてこの講義を進めてゆきたい。
高校までの微積分学を十分に理解しているものとして、
この講義を進めるので、高校までの微積分学については、序章において説明しているが、その内容については詳しくは述べない。
その分野については、各自で学習しておいて欲しい。

　読者の益々の健闘を祈っている。

\begin{flushright}
 2002 年 12 月 21 日\\
 高田　広志
\end{flushright}

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   微分方程式
%   物理からみた数学
%
%       微積分法入門
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\section{微積分法入門}
　高校で学習した微積分法\index{びせきぶんほう@微積分法}を
初めから一通り復習してみよう。
数学で微積分法を学習した人で微積分の公式を操るだけで
微積分の本質を理解していない人を多く見かける。
微積分の公式による計算技術のみを覚えて、
微積分学の意味を理解せずに答えがでるだけレベルに留まっている。

このような暗記型の知識では、物理の中で微積分を有効に活用できるようにはなれない。
微積分法を生きた知識とするためにも微積分の正しいイメージを掴んで欲しい。

\subsection{関数の微分係数\index{びぶんけいすう@微分係数}とグラフの接線の傾き}
　最初に微分について考えてみよう。
微分係数の定義は変数のわずかな変化 $\Delta x$ に対応する
関数値の変化$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ の割合を表し、

\begin{eqnarray}
  \frac{dy}{dx}=\lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}
\end{eqnarray}

と定義する。

　例えば、関数 $y=f(x)$ を $f(x)=x^2$ とすると、
変数が $x$ から $x+\Delta x$ のときの関数 $y$ の値の変化は
$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2$ だから、
$\Delta y=2x \Delta x +(\Delta x)^2$ である。
これより、$\Delta y=2x\Delta x + (\Delta x)^2$ である。
この平均の増加の割合 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は
変数 $x$ の変化に対する関数値の変化 $y$ の比であり、
関数のグラフの平均の傾きを表す。
このときの平均の傾きは
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は
$=\dfrac{2x\Delta x +(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$ になるが、
$\Delta x$ は微少量になるので、このときの平均の傾きは
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x$ と近似してよいだろう。

　このような変数 $x$ に対する関数 $y$ の変化において
変数の変化 $\Delta x$ が微小であるときの変化率を扱うには、
極限値 $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ とすればよい。
```

```latex
この極限値を $\dfrac{dy}{dx}$ と表し、これを微分係数という。
この微分係数は関数のグラフの接線の傾きを表していることになる。
$\Delta x$が十分小さいものとして、
これを$\dfrac{dy}{dx}$と表したものが微分係数であり、
この場合の関数 $y=x^2$ の微分係数は

\begin{equation}
 \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x
 \nonumber
\end{equation}

と表すことができる。
\vspace{6pt}

\begin{shadebox}
\vspace{6pt}
\centering{
  \fbox{重要} \hspace{10pt}
  微分係数\;$\dfrac{dy}{dx}$\; は関数のグラフの接線の傾きを表す
}
\vspace{6pt}
\end{shadebox}

\subsection{微分の定義と公式}
  微分法を扱う上で基本になる微分の定義と
それを一般的な数式に当てはめるための定義の拡張をまとめてみよう。
\subsubsection{微分の定義}\index{びぶんのていぎ@微分の定義}
  微分の定義は前述の通りである。
関数 $y=f(x)$ の変数 $x$ の微小変化 $\Delta x$ に対する関数値 $y$ の
微小変化 $\Delta y$ の割合の極限値である。

\begin{eqnarray}
 \frac{dy}{dx} &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\nonumber \\
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}
 \nonumber \label{eq:微分定義}
\end{eqnarray}

微分とはこの極限値を現すものである。

\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
 \frac{d}{dx}f(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}
\end{eqnarray}
\vspace{4pt}
\end{shadebox}
```

```
\subsubsection{関数の和・差の微分}
\index{かんすうのびぶん@関数の微分!かげん@関数の和差の微分}
  関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の和の関数 $y=f(x)+g(x)$ の微分は
どのようすればよいのだろうか。
微分の定義 \ref{eq:微分定義} に基づいて求めてみよう。
\begin{eqnarray}
\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\}
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)\}
     - \{f(x) \pm g(x)\}}{\Delta x} \nonumber \\
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}
     \pm \{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{\Delta x} \nonumber \\
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}
     \pm \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{\Delta x}
     \nonumber \\
 &=& \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) \nonumber
\end{eqnarray}

  関数の和差の関数の微分はそれぞれの関数の微分の和差になり、
非常に分かり易い結果となる。

\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
  \begin{eqnarray}
    \frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} &=& \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)
    \label{eq:和差の関数の微分}
  \end{eqnarray}
  \vspace{3pt}
\end{shadebox}


\subsubsection{関数の積の微分}
\index{かんすうのびぶん@関数の微分!せき@関数の積の微分}
  関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の積の関数 $y=f(x) \cdot g(x)$ の微分は
どのようすればよいのだろうか。
関数の和差の場合と同様に微分の定義 \ref{eq:微分定義} に基づいて求めてみよう。
\begin{eqnarray}
\frac{d}{dx}\{f(x) \cdot g(x)\}
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x)\}
     - \{f(x) \cdot g(x)\}}{\Delta x} \nonumber \\
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{
     \{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)\}
     + \{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)\}}{\Delta x} \nonumber \\
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}f(x+\Delta x)
     \cdot \frac{\{g(\Delta x)-g(x)\}}{\Delta x}
```

```
     +\lim_{\Delta x \to 0}g(x)\cdot \frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}
     \nonumber \\
 &=& f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\cdot \frac{d}{dx}f(x) \nonumber
\end{eqnarray}

\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
  \begin{eqnarray}
    \frac{d}{dx}\{f(x) \cdot g(x)\}
    &=& f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\cdot \frac{d}{dx}f(x)
    \label{eq:関数の積の微分}
  \end{eqnarray}
  \vspace{3pt}
\end{shadebox}


\subsubsection{関数の商の微分}
\index{かんすうのびぶん@関数の微分!しょう@関数の商の微分}
  関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の商の関数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の微分は
どのようすればよいのだろうか。
同様に微分の定義 \ref{eq:微分定義} に基づいて求めてみよう。

\begin{eqnarray}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)
  &=& \lim_{\Delta x \to 0}
   \frac{
    \left( \dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)
   } {\Delta x} \nonumber
\end{eqnarray}

\begin{eqnarray}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}
  \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}
       {g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot \Delta x} \nonumber \\
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}
  \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)g(x)-\{f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\}}
       {g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot \Delta x} \nonumber \\
 &=& \lim_{\Delta x \to 0}
       \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}
             {g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot \Delta x}\cdot g(x)
     -f(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0}
       \dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}
             {g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot \Delta x} \nonumber \\
 &=& \dfrac{\dfrac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot \dfrac{d}{dx}g(x)}
             {g(x)^2} \nonumber
\end{eqnarray}
```

```
\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)
 &=& \dfrac{\dfrac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot \dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}
 \label{eq:関数の商の微分}
\end{eqnarray}
\vspace{3pt}
\end{shadebox}

\subsubsection{関数の関数の微分}
\index{かんすうのびぶん@関数の微分!かんすうのかんすう@関数の関数の微分}
　関数の変数が関数で表されるものをいう。その関数とは、$f(g(x))$ の形をとり、
関数 $f$ の変数が関数 $g(x)$ であるような場合である。
この関数の微分係数を求めてみよう。
微分の定義 \ref{eq:微分定義} に当てはめると、
\begin{eqnarray}
 \frac{d}{dx}f(g(x))
   &=&\lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}\nonumber \\
   &=&\lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}
      \cdot \dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\nonumber \\
   &=&\lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}
      \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}
      \nonumber \\
   &=&\dfrac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot \dfrac{d}{dx}g(x) \nonumber
\end{eqnarray}

\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
 \frac{d}{dx}f(g(x))&=&\dfrac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot \dfrac{d}{dx}g(x)
 \label{eq:関数の関数の微分}
\end{eqnarray}
\vspace{3pt}
\end{shadebox}
\pagebreak


%--------------------
% 微分公式
%--------------------
\subsection{微分の公式}
\subsubsection{整式の微分公式}
\index{せいしきのびぶん@整式の微分}
\index{びぶん@微分!せいしきのびぶん@整式の微分}
　整式の微分について考えてみよう。最初は、定数式 $y=f(x)=C$ の微分を求めてみよう。
```

微分の定義 (\ref{eq:微分定義}) を適用して

```
\begin{eqnarray}
  \frac{dy}{dx} &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}
                    \nonumber \\
                &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{C-C}{\Delta x} \nonumber \\
                &=& 0   \nonumber
\end{eqnarray}
```

よって、定数関数は微分係数がゼロになる。

では、一次関数の微分係数も同様にして求めてみよう。

```
\begin{eqnarray}
  \frac{dy}{dx} &=& \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}
                    \nonumber \\
                &=& \lim_{\Delta x \to 0}
                      \frac{\{(x+\Delta x)\}-x}{\Delta x} \nonumber \\
                &=& 1 \nonumber
\end{eqnarray}
```

続いて、一般的な 1 次式 $y=f(x)=ax+b$ の微分は、
関数の和の微分と関数の積の微分を使って、求めると、

```
\begin{eqnarray}
  \frac{dy}{dx}&=&\frac{d}{dx}(a\cdot x)+\frac{d}{dx}(b) \nonumber \\
               &=&\frac{d}{dx}(a)\times x+ a\times \frac{d}{dx}(x)+0 \nonumber\\
               &=&a \nonumber
\end{eqnarray}
```

ここで、n次式の微分係数を求めてみよう。
始めに、$n=k$ の場合の $y=f(x)=x^k$ について 微分係数を次のように仮定してみよう。

```
\begin{eqnarray}
 \dfrac{dy}{dx}=k\cdot x^{k-1} \nonumber
\end{eqnarray}
```

数学的帰納法を使って、証明してみる。

$y=x^{k+1}$ の微分係数を微分の定義式 (\ref{eq:微分定義}) を適用して求めると、

```
\begin{eqnarray}
  \frac{dy}{dx}&=&\frac{d}{dx}(x^{k}\cdot x)\nonumber\\
               &=&\frac{d}{dx}(x^k)\times x + x^k \times \frac{d}{dx}(x)
               \nonumber\\
               &=&k\cdot x^{k-1}+x^k \cdot 1 \nonumber \\
               &=&(k+1)\cdot x^{(k+1)-1} \nonumber
\end{eqnarray}
```

```
したがって、$n=k+1$ の場合についても、
微分係数の式 $\dfrac{dy}{dx}=k\cdot x^{k-1}$ が成立している。
よって、全ての自然数 $n$ について

\begin{eqnarray}
 \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^n)=n\cdot x^{n-1} \nonumber
\end{eqnarray}

が成立する。また、一般的な整式についても、
関数の和・差の微分、関数の積の微分の公式より証明することが出来る。

\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
 \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^n)=n\cdot x^{n-1}\hspace{20mm}\label{eq:整式微分}
\end{eqnarray}
\vspace{3pt}
\end{shadebox}


\subsubsection{無理関数の微分公式}
\index{むりかんすうのびぶん@無理関数の微分}
\index{びぶん@微分!むりかんすうのびぶん@無理関数の微分}
　無理関数 $y=\sqrt{x}$ の微分を求めてみよう。
同様に、微分の定義 (\ref{eq:微分定義}) を適用すると、

\begin{eqnarray}
  \frac{dy}{dx}
           &=& \lim_{\Delta x \to 0}
               \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \nonumber \\
           &=& \lim_{\Delta x \to 0}
               \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}
                    {\Delta x\cdot (\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \nonumber \\
           &=& \lim_{\Delta x \to 0}
               \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \nonumber \\
           &=& \frac{1}{2\sqrt{x}} \nonumber
\end{eqnarray}

これは、$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ と考えたときの
整式の微分公式 (\ref{eq:整式微分}) を適用して、次のように考えることもできる。

\begin{eqnarray}
  \frac{d}{dx}\sqrt{x} &=& \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})\nonumber \\
           &=& \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}\nonumber \\
           &=& \frac{1}{2\sqrt{x}}\nonumber
\end{eqnarray}
```

```
\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
  \frac{d}{dx}\sqrt{x} &=& \frac{1}{2\sqrt{x}}
  \label{eq:無理関数微分}
\end{eqnarray}
\vspace{3pt}
\end{shadebox}


\subsubsection{指数関数の微分公式}
\index{しすうかんすうのびぶん@指数の微分}
\index{びぶん@微分!しすうかんすうのびぶん@指数の微分}
　指数関数の微分は、次の極限値を利用して求めることが出来る。

\begin{eqnarray}
  \lim_{\Delta x \to 0} (1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} &=& e \hspace{10mm}
  ただし、e は自然数\index{しぜんすう@自然数}、e=2.71828...\nonumber \\
  \lim_{x \to \infty} \left( 1+\frac{1}{n} \right)^n &=& e
  \hspace{10mm}ただし、e は自然数、e=2.71828...  \label{eq:自然数定義}
\end{eqnarray}

　自然数 $e$ を底とする指数関数 $y=e^x$ を
微分の定義式 (\ref{eq:微分定義}) を使って微分してみよう。

\begin{eqnarray}
  \frac{d}{dx}e^x &=& \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}
  \nonumber \\
  &=& e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}
  \label{eq:指数微分0} \nonumber
\end{eqnarray}


ここで、自然数 $e$ の定義式 (\ref{eq:自然数定義}) の両辺を $\Delta x$ 乗すると、
\begin{eqnarray}
  e^{\Delta x}&=& \lim_{\Delta x \to 0}
     \left((1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)^{\Delta x} \nonumber \\
   &=& \lim_{\Delta x \to 0}(1+\Delta x) \nonumber \\
   &=& 1 \nonumber
\end{eqnarray}

これを数式 (\ref{eq:指数微分0}) に代入するればよい。

\begin{eqnarray}
  \frac{d}{dx}e^x &=&  e^x \nonumber
\end{eqnarray}
```

```
\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
  \frac{d}{dx}e^x &=&  e^x  \label{eq:指数関数微分}
\end{eqnarray}
\vspace{3pt}
\end{shadebox}

\subsubsection{対数関数の微分公式}
\index{たいすうかんすうのびぶん@対数関数の微分}
\index{びぶん@微分!たいすうかんすうのびぶん@対数関数の微分}
  対数関数 $y=\log_e{x}$ の微分係数を求めて見よう。
定義式 (\ref{eq:微分定義}) を適用すると

\begin{eqnarray}
 \frac{d}{dx}{\log_e x}&=&\lim_{\Delta x \to 0}
    \frac{\log_e (x+\Delta x)-\log_e{x}}{\Delta x}\nonumber \\
   &=& \lim_{\Delta x \to 0}
    \frac{\log_e \left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\nonumber \\
   &=& \lim_{\Delta x \to 0}
    \frac{\log_e (1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}\nonumber \\
   &=& \lim_{\Delta x \to 0}
    \frac{\log_e (1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot \frac{1}{x}
    \nonumber \\
   &=& \lim_{\Delta x \to 0}
        \log_e (1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}
        \cdot \frac{1}{x} \nonumber \\
   &=& \frac{1}{x} \nonumber
\end{eqnarray}

\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
  \frac{d}{dx}\log_e{x} &=& \frac{1}{x} \label{eq:対数関数微分}
\end{eqnarray}
\vspace{3pt}
\end{shadebox}


\subsubsection{三角関数の微分公式}
\index{さんかくかんすうのびぶん@三角関数の微分}
\index{びぶん@微分!さんかくかんすうのびぶん@三角関数の微分}
  三角関数についても微分の定義式 (\ref{eq:微分定義}) を適用して計算すればよい。
この場合に使われる極限値は次の通りである。

\begin{eqnarray}
```

```
  \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin x}{x} &=& 0 \label{eq:正弦極限 0}
\end{eqnarray}
```

　三角関数の一つである正弦関数 $y=\sin x$ の微分係数を求めてみよう。

```
\begin{eqnarray}
 \frac{d}{dx}{\sin x}&=&\lim_{\Delta x \to 0}
    \frac{\sin (x+\Delta x)-\sin{x}}{\Delta x} \nonumber
\end{eqnarray}
```

ここで、
三角関数の加法定理 $\sin (x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ を使って変形すると、

```
\begin{eqnarray}
 \sin (x+\Delta x)-\sin{x}
   &=&\sin x \cos \Delta x +\cos x \sin \Delta x -\sin x \nonumber \\
   &=&\sin x (\cos \Delta x-1) +\cos x \sin \Delta x \nonumber
\end{eqnarray}
```

になるから、これを正弦関数の極限値 (\ref{eq:正弦極限 0}) を使って計算すると

```
\begin{eqnarray}
 \frac{d}{dx}{\sin x}
  &=&\lim_{\Delta x \to 0}
     \frac{\sin (x+\Delta x)-\sin{x}}{\Delta x} \nonumber \\
  &=&\lim_{\Delta x \to 0}
     \frac{\sin x (\cos \Delta x-1)+\cos x\sin \Delta x}{\Delta x}\nonumber \\
  &=&\lim_{\Delta x \to 0}\left(
     \frac{\sin x (\cos \Delta x-1)}{\Delta x}
     +\frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right) \nonumber \\
  &=&\lim_{\Delta x \to 0} \left(
     \frac{\sin x ({\cos}^2 \Delta x-1)}{\Delta x \cdot (\cos \Delta x + 1)}
     +\frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right) \nonumber \\
  &=&\lim_{\Delta x \to 0} \left(
     -\frac{\sin x}{\cos \Delta x + 1}\cdot
     \frac{{\sin}^2 \Delta x}{\Delta x^2 }\cdot \Delta x
     +\cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) \nonumber \\
  &=&-\frac{\sin x}{2} \cdot 1^2 \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \nonumber \\
  &=& \cos x \nonumber
\end{eqnarray}
```

　次に、余弦関数 $y=\cos x$ の微分係数を求めてみよう。
正弦関数 $\sin x$ の微分と同様の方法で、微分の定義から求める正統法もあるが、
今回は、関数の関数の微分 (\ref{eq:関数の関数の微分}) を使ってみよう。
$\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ だから、
$f(g(x))=\sin f(x)$、$g(x)=\frac{\pi}{2}-x$ と考えて、

```
公式(\ref{eq:関数の関数の微分})に代入すると、

\begin{eqnarray}
 \frac{d}{dx}{\cos x}
  &=&\frac{d}{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}\nonumber \\
  &=&\cos (\frac{\pi}{2}-x) \cdot \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2}-x) \nonumber \\
  &=&\cos (\frac{\pi}{2}-x) \cdot (-1) \nonumber \\
  &=&-\sin x \nonumber
\end{eqnarray}

この方法を使う方が微分の定義から導くよりも随分と簡単になることを覚えておくと良い。
このような数学の分野に限らず、
多様な方法を理解しておくことで
自分の行動や判断を自在に変化させせることができるようなる。
固定化された知識は生きた力につながらない。(教訓だよ)

\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
 \begin{eqnarray}
  \sin{x}&=&\cos{x}  \label{eq:正弦関数微分}\\
  \cos{x}&=&-\sin{x} \label{eq:余弦関数微分}
 \end{eqnarray}
 \vspace{6pt}
\end{shadebox}
\pagebreak

%--------------------
% 積分公式
%--------------------
\subsection{積分}
\index{せきぶん@積分}
\subsubsection{グラフと面積}
 積分とは、微分計算と逆操作の関係になる。具体的に関数のグラフで考えてみよう。
関数 $y=f(x)$ について考えてみよう。この関数が $x$ 軸との間の面積を考える。
$x=0$ から $x=x$ の間の面積を $S(x)$ とする。$x=x+\Delta x$ のときの面積は
$S(x+\Delta x)=S(x)+y \cdot \Delta x $ と表される。これを変形すると、

\begin{eqnarray}
 y=\dfrac{S(x+\Delta x)-=S(x)}{\Delta x} \nonumber
\end{eqnarray}

この関係式はグラフの面積は
「微分したときにその関数になるもの」に相当することを示している。

したがって、
「グラフの面積を求める操作」、「微分したときその関数になる関数」として
積分(定積分)を定義できることになる。
```

（数学のように厳密さはないが、物理だから許せる !? ）

なお、定積分の操作を表す数式として、次の様な表現で表すことにする。

```
\begin{eqnarray}
  F(x)&=&\int_a^b f(x)\;dx \nonumber \\
  \textstyle{ただし、}
  f(x)&=&\lim_{\Delta x \to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}
  \label{eq:定積分定義}
\end{eqnarray}
```

また、定積分の範囲を決めない（不定範囲）の定積分を、不定積分という。

```
\begin{eqnarray}
  F(x)&=&\int f(x)\;dx \nonumber \\
  \textstyle{ただし、}
  f(x)&=&\lim_{\Delta x \to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}
  \label{eq:不定積分定義}
\end{eqnarray}
```

```
\subsection{積分公式}
\index{せきぶんこうしき@積分公式}
\index{せきぶん@積分!せきぶんこうしき@積分公式}

\subsubsection{整式の積分公式}
```

微分のときと同様に、整式の積分から説明してみよう。以下不定積分で表現する。

```
\begin{eqnarray}
  \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \hspace{10mm}C \textstyle{は積分定数}
  \nonumber
\end{eqnarray}
```

なお整式の積分公式 (\ref{eq:整式積分}) の左辺を微分すると、
積分前の関数に戻ることを確かめてみると良い。

```
\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
  \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \hspace{10mm}C \textstyle{は積分定数}
  \label{eq:整式積分}
\end{eqnarray}
\vspace{3pt}
\end{shadebox}

\subsubsection{置換積分の公式}
```

関数の関数の微分公式 (\ref{eq:関数の関数の微分}) の両辺を積分したものを、

置換積分という。

　関数の関数を微分する公式の両辺を積分したものが置換積分の基本公式となる。

```
\begin{eqnarray}
 \frac{d}{dx}f(g(x))&=&\dfrac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot \dfrac{d}{dx}g(x)
 \nonumber \\
 f(g(x))&=&\int \frac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot \dfrac{d}{dx}g(x) dx
 \nonumber
\end{eqnarray}

\begin{eqnarray}
 f(g(x))&=&\int \dfrac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot \dfrac{d}{dx}g(x) dx
 \nonumber
\end{eqnarray}

\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
 f(g(x))&=&\int \dfrac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot \dfrac{d}{dx}g(x) dx
  \label{eq:置換積分}
\end{eqnarray}
\vspace{3pt}
\end{shadebox}


\subsubsection{部分積分の公式}
```

　関数の積の微分公式 (\ref{eq:関数の積の微分}) を利用する。

```
\begin{eqnarray}
    \frac{d}{dx}\{f(x) \cdot g(x)\}
    &=& f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\cdot \frac{d}{dx}f(x)\nonumber\\
    \int f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) dx &=& f(x) \cdot g(x)
    - \int g(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x) dx \nonumber
\end{eqnarray}
```

　この公式を使いこなすためには、十分な練習が必要である。
練習を積み重ねることでして、
積分する関数をどのように２つの関数に分解するかが分かるようになる。
（簡単なものから難しいものまで段階を追って練習し、その操作を覚えてしまうこと）

```
\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
\begin{eqnarray}
  \int f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) dx &=& f(x) \cdot g(x)
  -\int g(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x) dx
  \label{eq:部分積分}
\end{eqnarray}
```

```
\vspace{3pt}
\end{shadebox}
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  微分方程式
%  物理からみた数学
%
%       「微積分法本論」
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\section{微分方程式}
\index{びぶんほうていしき@微分方程式}
\subsection{微分方程式を作る}
\begin{itembox}[l]{例題}
  関数上の点 $(x,y)$ での接線の傾きが $y$ に等しく、点$(0,2)$ を通る関数とはどのようなものだろうか？
\end{itembox}
  まず、この関数の微分方程式を作ってみよう。
グラフの傾き $\dfrac{dy}{dx}$ が $y$ に等しいから、次の関係式が成立する。
\begin{eqnarray}
  \frac{dy}{dx}=y \label{eq:微分方程式 0}
\end{eqnarray}
  以上のように、微分係数を含む関係式を微分方程式という。
微分方程式といっても、特別なものではない。
その関数の条件を「微分係数を含む関係式」として表しているに過ぎない。
このような関係式（微分方程式）を満たす関数 $y=f(x)$ とはどのようなものだろうか。
その解法について考えてみよう。

% -------------------------
%  微分方程式の基本例題
% -------------------------
\subsection{変数分離法}
  微分方程式を解く技術として、微分方程式に含まれる変数に注目して解く方法がある。
これを変数分離法\index{へんすうぶんりほう@変数分離法}という。
変数分離法では、
「変数分離\index{へんすうぶんり@変数分離}」という作業が行なわれる。
「変数分離」とは、同一の変数を方程式の両辺に分けるように変形する操作をいう。
では、具体的な例を上げて説明してみよう。

  微分方程式 (\ref{eq:微分方程式 0}) の場合、
この方程式には、変数 $x$、$y$ が含まれているので、「変数分離」を行なう。
変数は $x$ と $y$ だから、
右辺に $x$、左辺に $y$ になるように変数分離すると
次のような微分方程式に変形できる。
\begin{equation}
  \dfrac{dy}{y}=dx \nonumber
\end{equation}
このようにする操作を「変数分離」という。
この微分方程式の両辺は変数が１つになり、それぞれを積分することが出来る。
```

```
\begin{equation}
 \int{\dfrac{dy}{y}}=\int{dx}  \nonumber
\end{equation}
だから、積分公式を適用して、右辺、左辺それぞれの積分を実行すると、
\begin{eqnarray}
  \log_e \mid y \mid &=& x+C \hspace{20pt} （C は積分定数）\nonumber \\
  y &=& \pm e^{x+C} \nonumber \\
  y &=& A \cdot e^x \hspace{10mm} （定数 A=\pm \cdot e^C)\label{eq:変数分離 eq1}
\end{eqnarray}

　ここで得られた関数は定数 $A$ を含んでいるため、関数を確定できていない。
続いて、関数の初期条件\index{しょきじょうけん@初期条件}や
\index{せきぶん@積分!しょきじょうけん@初期条件}
境界条件\index{きょうかいじょうけん@境界条件}
\index{せきぶん@積分!きょうかいじょうけん@境界条件}
と呼ばれる関数の条件を適用して
\index{せきぶんていすうのかくてい@積分定数の確定}
\index{せきぶん@積分!せきぶんていすうのかくてい@積分定数の確定}
この定数 $A$ を確定する作業が残っている。
この作業では、
 境界条件\index{きょうかいじょうけん@境界条件}、
 初期条件\index{しょきじょうけん@初期条件}
（時刻 $t=0$ のときの条件を「初期条件」という）
というものを利用してこの積分定数を確定することができる。

　この関数の場合では、
点 $(0,2)$ を通るという条件（これを「境界条件」という。）が
積分定数を確定する条件に当たる。

この関数は点 $(0,2)$ を通ることから、$x=0$、$y=2$ を
微分方程式を解いて得られた関数\ref{eq:変数分離 eq1}に代入してやると、

$$  2=A \cdot e^0 $$
$$  A=2 $$

よって、関数上の点 $(x,y)$ での接線の傾きが $y$ に等しく点 $(0,2)$ を通る関数は
次のような関数であることがわかる。

$$  y = 2 \cdot e^{x} \nonumber $$

このようにして微分方程式の解が求められるのである。
ただし、
どの微分方程式でも変数分離法で微分方程式の解が求まるわけでは無論ないのだが。
\vspace{6pt}

% ------------------------
```

```
%　変数分離法の基本例題
% -------------------------
\fbox{例題}



\subsection{速度と加速度}
\index{そくどとかそくど@速度と加速度}
\index{そくど@速度}
\index{かそくど@加速度}
　続いて、物理分野での微分方程式の実用例を研究してみよう。
当然、物理の最初は速度、加速度の分野である。この分野の微分・積分法の扱いは、
ニュートン自身が発明したものであり、ニュートン自身も微分法の創始者
\index{にゅーとん@ニュートン}
\footnote{微分・積分法を数学として完成したのはライプニッツによる}の一人である。

　物理での微積分の考えは多くの分野に当てはめることが出来る。
例えば、速度、加速度も微分の考えそのものである。
速度の定義について考えてみよう。
物体が運動しているとき、時間 $t$ のときの位置が $x$ から
$t+\Delta t$ のときの位置 $x+\Delta x$ に移動した場合、
移動時間 $\Delta t$ の間の移動距離が $\Delta x$ だから、
そのときの平均の速度は $\bar{v}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ である。
このとき、移動時間 $\Delta t$ をゼロに近づけると、
瞬間の速度になる。

\begin{eqnarray}
 v=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}
 \label{eq:速度定義}
\end{eqnarray}


　これより、速度は位置を時間を変数として微分したものであることが分かる。
同様に、加速度についても定義により求めると、
\begin{eqnarray}
 a&=&\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\nonumber \\
  &=&\frac{dv}{dt} \label{eq:加速度定義1} \\
  &=&\frac{d^2x}{dt^2} \label{eq:加速度定義2}
\end{eqnarray}
となるので、加速度は速度を時間を変数として微分したものであり、
位置を時間で2次微分したものであることがわかる。

　したがって、位置、速度、時間は、微積分学を使えば、次のように考えることができる。

\vspace{6pt}
\begin{shadebox}
 \begin{eqnarray}
  % \textstyle{位置}\overbrase{\underbrase{\rightleftharpoons}_{微分}}^{積分}
```

```
  % \textstyle{速度}\overbrase{\underbrase{\rightleftharpoons}_{微分}}^{積分}
  % \textstyle{時間}\overbrase{\underbrase{\rightleftharpoons}_{微分}}^{積分}
  \textstyle{\quad \fbox{位置}\quad }{}^{微分}\rightleftharpoons_{積分}
  \textstyle{\quad \fbox{速度}\quad }{}^{微分}\rightleftharpoons_{積分}
  \textstyle{\quad \fbox{加速度}\quad } \label{eq:位置速度加速度}
 \end{eqnarray}
 \vspace{1pt}
\end{shadebox}


\subsection{等加速度運動と微分方程式}
\index{とうかそくどうんどう@等加速度運動}
　落下運動\index{らっかうんどう@落下運動}とは、
重力が働く空間における物体の運動をいう。
物体に働く力は一定の重力だけだから、運動方程式は $ma=mg$ となり、
加速度は $a=g$ で一定の等加速度運動になる。
等加速度運動には
３つの公式\index{とうかそくどうんどうのこうしき@等加速度運動の公式}
の存在がある。
\begin{eqnarray}
 x&=&v_0t+\dfrac{1}{2}at^2 \\
 v&=&v_0+at \\
 v^2-v_0^2&=&2ax
\end{eqnarray}

この３つの公式を用いて速度や位置を計算できることは、
幾度となく計算経験があるはずだ。
　公式を暗記するのではなく、
微積分法を用いて理論的にすっきりした形に構成することができる。
一般に、速度は $v=\dfrac{dx}{dt}$ になり、
加速度は $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ と表すことができる。

　落下運動は下向きに重力加速度 $g$ の等加速度運動だから、
上向きを正として $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=-g$ になる。
この微分方程式を解けばよい。

\begin{itembox}[l]{落下運動}
　$$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=-g $$
\end{itembox}

　微分方程式１\; $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-g$ と
微分方程式２\; $\dfrac{dv}{dt}=-g$ に分けて考える。

　最初に、微分方程式１について解く。
変数分離して、$dv=-gdt$ だから
両辺を積分すると$\int {dv}=\int -g{dt}$ より、
$v=-gt+C$（$C$ は積分定数）である。初期条件$t=0$ のとき $v=v_0$ だから、
```

```
これを代入して、$v_0=C$ だから、$v=-gt+v_0$ となり、2 番目の公式に一致する。

　つぎに、$v=\dfrac{dx}{dt}$ より、$-gt+v_0=\dfrac{dx}{dt}$ だから、
変数分離して、積分すればよい。
$\int -gt+v_0{dt}=\int{dx}$ だから、
$-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t+C=x$ になる。
初期条件$t=0$ のとき $x=0$ だから、
$x=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t$ になる。
\vspace{12pt}



% -------------------------
%　速度、加速度の基本例題
% -------------------------
\fbox{例題} \index{れいだい@例題}
\begin{enumerate}
\item{
\textbf{　高さ $5.0$ メートルの柱の上に電球がついている。
身長 $2.0$ メートルの人が秒速 $1.0$ メートルで電柱から遠ざかっている。
頭の影が動く速度を求めなさい。}

\vspace{10pt}
　人が電柱から $x$ メートル離れたところにいるとき、
頭の影の位置が $y$ メートルの位置にできるとする。
　このとき、$5.0:2.0=y:y-x$ の比例関係が成立する。
\begin{eqnarray}
 2y=5(y-x) \nonumber \\
 y=\frac{5}{3}x \label{eq:影の速度 1}
\end{eqnarray}
 人の移動速度は秒速 $1.0$ メートルだから、
位置 $x$ の時間 $t$ で微分したものが速度だから、次の式が成立する。
\begin{eqnarray}
 \frac{dx}{dt}=1.0  \label{eq:影の速度 2}
\end{eqnarray}

また、上の関係式 (\ref{eq:影の速度 1}) の両辺を時間 $t$ で微分すると、
次のようになる。

\begin{eqnarray}
 \frac{dy}{dt}=\frac{5}{3} \cdot \frac{dx}{dt} \nonumber
\end{eqnarray}
これに式 (\ref{eq:影の速度 2}) を代入すると、
\begin{eqnarray}
 \frac{dy}{dt}=\frac{5}{3}\times 1.0 \nonumber
\end{eqnarray}
　影の速度は $\dfrac{dy}{dt}$ だから、
影の速度は秒速 $\dfrac{5}{3}=1.7$ メートルになる。
```

```
}
\vspace{10pt}

\item{\textbf{　高さ $5.0$ メートルの柱の上に電球がついている。
$2.0$ メートル離れた位置の地上か秒速 $0.10$ メートルの等速で上昇する物体がある。
地上に出来るこの物体の影の速度が秒速 $5.0$ メートルを超えるのは何秒後になる。}
\vspace{10pt}

　時刻 $t$ 秒のときの物体の高さは $0.1t$ メートルである。
影の移動方向を $x$ 軸にとり、影の位置を $x$ メートルとする。
前例題と同様に考えるとよいので、次の様な比例関係が成立する。
\begin{eqnarray}
 5.0:0.1t=x:x-2 \nonumber
\end{eqnarray}
比例式を普通の方程式に変えると、
\begin{eqnarray}
 0.1tx=5(x-2) \nonumber \\
 x=\frac{10}{5-0.1t} \label{eq:影の位置}
\end{eqnarray}
両辺を時間 $t$ で微分すると、次の式になる。
\begin{eqnarray}
 \frac{dx}{dt}=\frac{1}{(5-0.1t)^2} \nonumber \\
 \frac{dx}{dt}=\frac{1}{(5-0.1t)^2}<5
\end{eqnarray}
この不等式を解くと影の速度が秒速 $5.0$ メートル未満の時刻が求められる。
\begin{eqnarray}
 5 < 5 \cdot (5-0.1t)^2 \nonumber \\
 1 < (5-0.1t) \textstyle{または} -1>(5.0-0.1t) \nonumber \\
 t<40 \textstyle{または} t>60
\end{eqnarray}

 また、時刻 $t=50$ 秒のとき、電球の高さを物体が超えるので影が出来なくなる。
よって、$t<40$ 秒のとき、影の速度が秒速 $5.0$ メートルを超えることになる。




}

\end{enumerate}



\subsection{円運動と単振動}
\index{えんうんどう@円運動}



\subsubsection{円運動の向心力}
\index{えんうんどう@円運動!こうしんりょく@向心力}
```

```
\subsubsection{ばね振り子}
\index{たんしんどう@単振動}
\index{ばね@ばね}
\index{ばね!たんしんどう@ばねの単振動}
\index{ばね!しゅうき@ばねの単振動の周期}


\subsubsection{単振り子}\index{たんふりこ@単振り子}
\index{たんふりこのたんしんどう@単振り子の単振動}


\subsection{仕事とエネルギー}
\subsubsection{ばねの弾性力による位置エネルギー}
\index{ばね!えねるぎー@ばねの弾性力によるエネルギー}


\subsection{電流と電気量}
\subsubsection{コンデンサーに蓄えられるエネルギー}


\subsection{電磁誘導の法則}
\subsubsection{誘導起電力}
\index{こいる@コイル!コイル@コイルの誘導起電力}
\index{でんじゆうどう@電磁誘導!ゆうどうきでんりょく@コイルの誘導起電力}


\subsubsection{コイルのインダクタンス}
\index{でんじゆうどう@電磁誘導!いんだくたんす@コイルのインダクタンス}
\index{こいる@コイル!いんだくたんす@コイルのインダクタンス}


\subsubsection{コイルに蓄えられるエネルギー}
\index{でんじゆうどう@電磁誘導!えねるぎー@コイルののエネルギー}
\index{こいる@コイル!えねるぎー@コイルののエネルギー}


\subsubsection{リアクタンス}
\index{こんでんさ@コンデンサ!こんでんさのりあくたんす@コンデンサのリアクタンス}
\index{こいる@コイル!こいるのりあくたんす@コイルのリアクタンス}


\subsubsection{交流回路}
\index{こうりゅうかいろ@交流回路}
\index{こうりゅうかいろ@交流回路!いんぴーだんす@インピーダンス}
```

```
\subsection{原子物理学}
\subsubsection{半減期と微分方程式}
\index{はんげんき@半減期}
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  微分方程式
%  物理からみた数学
%
%  「微積分法本論」
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\section{実践練習}\index{じっせんれんしゅう@実践練習}
\index{じっせんもんだい@実践問題!きほんもんだい@基本問題}
\subsection{基本問題}\index{きほんもんだい@基本問題}
\begin{description}
\item{\fbox{練習１}\;
$y=f(x)$ が原点$(0,0)$を通り、
$y=f(x)$ 上の点の任意の点Ｐ $(x,y)$ と
定点Ａ $(0,a)$ を結ぶ線と接線が直交するとき
$f(x)$ を求めなさい。

（幾何学によると円周角が等しいので $P$ の軌跡は円になるはずだが、
きちんと計算して求めてください）
}

\item{\fbox{練習２}\;\index{たんくのすいめんていか@タンクの水面低下}
　大きなタンクに入っている水がタンクの底から抜けてゆく経過を計算してみよう。
タンクのサイズは半径が $R$、高さが $H$ で、
底に開けた穴の大きさは半径が $r$ である。
タンク一杯に入った水が穴から出てゆくとき、
時刻 $t$ のとき、水面の高さを $h=f(t)$ として、
この関数 $f(t)$ を求めなさい。
}

\end{description}

\subsection{応用問題}\index{おうようもんだい@応用問題}
\index{じっせんもんだい@実践問題!おうようもんだい@応用問題}
\begin{description}

\item{\fbox{練習３}\;\index{コンデンサ!じゅうでんかてい@充電過程}
 電圧を$V_0$（V）、内部抵抗\index{ないぶていこう@内部抵抗}が
$r$ $(\Omega )$ の電源でコンデンサーを充電する。このとき、コンデンサーの電圧がどのように上昇し
てゆくかを時間の関数として求めなさい。
このとき、充電するコンデンサーの
電気容量\index{コンデンサ!でんきようりょう@電気容量} を $C$（F）とする。
}

\item{\fbox{練習４}\;
 コンデンサーを充電\index{コンデンサ!じゅうでん@充電}
```

するとき、電池が供給するエネルギーの半分が
コンデンサーのエネルギー\index{コンデンサ!えねるぎー@エネルギー}として蓄えられる。
残りの半分は回路の抵抗（電池の内部抵抗を含む）により消費される。本当だろうか？ 正確に計算してみよう。

充電するコンデンサーの電気容量を C（F)、
電池の電圧をV_0(V)、
回路の抵抗をR（Ω ）とする。

}

\item{\fbox{練習５}\;\index{こいる@コイル}
　電圧をV_0（V)、内部抵抗をr（Ω）の電源にコイルを接続し、スイッチを入れた後、コイルに流れる電流の変化\index{コイル!でんりゅう@電流}が
どのように変化するかを求めなさい。
このとき、コイルのインダクタンスを L（H)、
電圧をV_0（V)、内部抵抗をr（Ω）とする。
}

\item{\fbox{練習６}\;\index{あめつぶのらっかそくど@雨粒の落下速度}
　空から雨粒が落ちてくるときの運動を考えてみよう。
雨粒の質量がm(kg)、雨粒が空気から受ける抵抗力は雨粒の速度に比例する。
この抵抗力を $f=kv$ 、重力加速度を $\it{g}$ として考えてみよう。
この抵抗力のため、雨が地上に落下する速度はある程度の大きさに制限される。
この速度を終速度\index{しゅうそくど@終速度}という。
}
\end{description}

\subsection{発展問題}\index{はってんもんだい@発展問題}
\index{じっせんもんだい@実践問題!はってんもんだい@発展問題}
\begin{description}
\item{\fbox{練習７}\;\index{ふりこ!ていこうりょく@抵抗力}
　水の中で振り子を振らせたとき、振り子はどのように動くだろうか？ 空気中と異なり
水の中では水による抵抗力が大きくなるので、振り子の動きは急速に失われる。
水の抵抗力をどのように扱うかは、流体力学という物理学を学ぶ必要がある。
今回は深く考えずに、
水の中での「抵抗力は振り子の速度に比例する」と単純化して
扱うことにしよう。
振り子の速度を v とすると、
振り子が受ける水の抵抗力は $f=kv$ （kは抵抗力の比例定数）と表すことが出来る。
このときの振り子の運動を解析してください。
}

\end{description}

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%　微分方程式
%　物理からみた数学
%
%　　　「補足資料」
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


\appendix{追加資料}

\section{追加資料}
\subsection{変数分離が使えない微分方程式}


\subsection{ベクトル変数、関数の微積分}


\subsection{複素関数の微積分}




%-------------------------------
% 練習問題の解答
%-------------------------------
\section{練習問題解答}
\begin{description}
\item{\fbox{練習１}\;

　直線ＰＡの傾きは$\dfrac{y-a}{x-0}$、接線の傾きは$\dfrac{dy}{dx}$だから、
直交するとき、両者の積は $-1$ だから

\begin{equation}
\fbox{微分方程式} \hspace{20pt} \dfrac{dy}{dx} \times \dfrac{y-a}{x-0}=-1
\end{equation}

変数分離して、積分すると、

\begin{equation}
\int{y-a\;dy}=-\int{x\;dx} \nonumber
\end{equation}

よって、

\begin{equation}
\frac{1}{2}y^2-ay=-\frac{1}{2}x^2+C \nonumber
\end{equation}
```

```
式を整理すると、

\begin{equation}
x^2+(y-a)^2=2C+a^2 \nonumber
\end{equation}

原点を通るのでこれを代入して、$C=0$だから、

\begin{equation}
\fbox{答} \hspace{20pt} x^2+(y-a)^2=a^2
\end{equation}

やはり円だった。想像した通りだ。
}

\item{\fbox{練習２}\;

　時刻 $t$ のときにタンクの底から水が出てゆく速さ $v$ は、
エネルギー保存の法則より、$mgh=\dfrac{1}{2}mv^2$ だから、
$v=\sqrt{2gh}$ になる。
これより、時間 $\Delta t$ にタンクから出てゆく水の量は
 $\Delta V=-\pi r^2 \times v$ であるので、
$$\pi R^2\cdot\Delta h=-\pi r^2 \sqrt{2gh}\Delta t$$
$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=-\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2gh}$$
これより、$\Delta t$ が短い時間であるとすると
$$\frac{dh}{dt}=-\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2gh}$$
タンクの水面が下がって行く時間経過を表すこれが微分方程式である。
「変数分離法」でこれを解くには、右辺と左辺に変数 $h$ と $t$ を分離すると
$$\frac{dh}{\sqrt{2gh}}=-\frac{r^2}{R^2}dt$$
両辺を積分して
$$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}=\int -\frac{r^2}{R^2}dt$$
$$\sqrt{\frac{2h}{g}}=-\frac{r^2}{R^2}t+C$$
初期条件 $t=0$ のとき、$h=H$ だから、
$$C=\sqrt{\frac{2H}{g}}$$
$$\sqrt{\frac{2h}{g}}=-\frac{r^2}{R^2}t+\sqrt{\frac{2H}{g}}$$
両辺を２乗して$h$を求めると、時刻$t$のときの水面の高さ$h$は
$$h=\frac{g}{2}\left(-\frac{r^2}{R^2}t+\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)^2$$
よって、タンクから水が無くなるのは、
$$0=\frac{g}{2}\left(-\frac{r^2}{R^2}t+\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)^2$$
$$\frac{r^2}{R^2}t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$$
$$t=\frac{R^2\sqrt{2H}}{r^2\sqrt{g}}$$
である。
}

\item{\fbox{練習３}\;
```

時刻 t のとき、コンデンサーを充電する電流が I であった。
Δt の短い時間でコンデンサーに充電する電気量は
$\Delta Q=I \cdot \Delta t$ である。
このときのコンデンサーの電圧上昇が ΔV であるとすると、
コンデンサーの電気量の増加は $\Delta Q=C \cdot \Delta V$ である。
また、電圧の関係より $V_0=V+Ir$ だから、$I=\dfrac{V_0-V}{r}$ になる。
以上より、

```
\begin{eqnarray}
\dfrac{V_0-V}{r}\cdot \Delta t=C \cdot \Delta V \nonumber
\end{eqnarray}
```

これを変数分離して整理すると、

```
\begin{eqnarray}
\Delta t=\dfrac{Cr \cdot \Delta V}{V_0-V} \nonumber
\end{eqnarray}
```

両辺積分して、初期条件を代入する。

```
\begin{eqnarray}
\int_0^t dt &=& \int_0^{V_t} \dfrac{Cr}{V_0-V}\cdot dV \nonumber \\
 t&=& \int_0^{V_t} \dfrac{Cr}{V_0-V}\cdot dV \nonumber \\
 &=& \int_0^{V_t} \dfrac{Cr}{V_0-V}\cdot dV \nonumber
\end{eqnarray}
```

ここで、$X=V_0-V$ と置いて、積分変数を置換すると、

```
\begin{eqnarray}
 t&=& -\int_{V_0}^{V_0-V_t} \dfrac{Cr}{X}\cdot dX \nonumber \\
  &=& -Cr\cdot \log X \Bigl |_{V_0}^{V_0-V_t}
\end{eqnarray}

\begin{eqnarray}
 t&=& -Cr\cdot \log X \Bigl |_{V_0}^{V_0-V_t} \\
  &=& -Cr\cdot \log\frac{V_0-V_t}{V_0}
\end{eqnarray}
```

よって、時刻tにおけるコンデンサーの両端の電圧は

```
\begin{eqnarray}
  V_t &=&V_0(1-e^{-\frac{1}{Cr}t})
\end{eqnarray}
}

\item{\fbox{練習４}\;
```

```
前問より、時刻$t$におけるコンデンサーの両端の電圧は

\begin{eqnarray}
  V_t &=&V_0(1-e^{-\frac{1}{CR}t})
\end{eqnarray}

 時刻 $t$ のとき、コンデンサーを充電する電流が $I$ とすると、
抵抗の電圧は $V_0-V_t$ であるから、抵抗で消費される電力は

\begin{eqnarray}
  P_t &=\dfrac{\Bigl( V_0 \cdot e^{-\frac{1}{CR}t}\Bigr)^2}{R}
\end{eqnarray}

したがって、$\Delta t$ の間の消費電力量は $P_t \cdot \Delta t$ になる。
充電開始から充電終了までに消費する電力量の合計は

\begin{eqnarray}
  W&=&\int_0^\infty P_t dt \\
   &=&\int_0^\infty \dfrac{(V_0 \cdot e^{-\frac{1}{CR}t})^2}{R} dt \nonumber \\
   &=&\frac{V_0{}^2}{R} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2}{CR}t}) dt \nonumber \\
   &=&\frac{V_0{}^2}{R} \cdot \Bigl(-\frac{CR}{2}\Bigr)
      \cdot e^{-\frac{2}{CR}t}\Bigl |_0^\infty \nonumber \\
   &=&\frac{1}{2}CV_0{}^2
\end{eqnarray}

以上より、抵抗で消費される電力量と
コンデンサーに蓄えられている静電エネルギー\; $U=\dfrac{1}{2}CV_0{}^2$
\; に等しいことが確かめられた。
}

\item{\fbox{練習５}\;

 時刻 $t$ のとき、コイルに流れる電流値を $I$ とする。
コイルに発生する誘導起電力は $V=-L \cdot \dfrac{dI}{dt}$ だから、
キルヒホッフの法則より、次のような関係式が成立する。

\begin{eqnarray}
 V_0 - L \cdot \frac{dI}{dt}=I \cdot R
\end{eqnarray}

変数分離すると、

\begin{eqnarray}
  dt = \frac{L \cdot dI}{V_0 - I \cdot R} \nonumber
\end{eqnarray}

両辺積分すると
```

```
\begin{eqnarray}
  t+C &=& \int \frac{L}{V_0 - I \cdot R}dI   \nonumber \\
      &=& -\frac{L}{R}\log | V_0 - I \cdot R | \nonumber \\
  e^{-\frac{R}{L} \cdot (t+C)} &=& | V_0 - I \cdot R |
\end{eqnarray}
```

初期条件 $t=0$ のとき、$I=0$ を代入して

```
\begin{eqnarray}
  e^{-\frac{R}{L}C}&=&V_0
\end{eqnarray}
```

初期条件から求めた式を使って積分定数を消去すると

```
\begin{eqnarray}
  V_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} &=& | V_0 - I \cdot R | \nonumber \\
  I&=&\frac{V_0}{R} \cdot \left( 1- e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)
\end{eqnarray}
}
```

\item{\fbox{練習６}\;

　雨粒に働く力は、下向きに重力が mg、上向きに抵抗力が kv だから、
下向きを正として運動方程式を作ると $ma=mg-kv$ である。
また、速度を時間 t で微分したものが加速度だから $a=\dfrac{dv}{dt}$ とかける。以上の２式より、
雨粒が落下するときの運動を表す微分方程式は次のようになる。

```
\begin{eqnarray}
  \dfrac{dv}{dt}=mg-kv
\end{eqnarray}
```

この微分方程式を解くには、変数分離の形に変形して、両辺を積分をとると

```
\begin{eqnarray}
 \dfrac{dv}{mg-kv}=dt \nonumber \\
 \int{\dfrac{dv}{mg-kv}}=\int{dt} \nonumber
\end{eqnarray}
```

積分を計算すると、

```
\begin{eqnarray}
 \left[\;-\dfrac{1}{k}\log |{mg-kv}|\;\right]=t+C \nonumber
\end{eqnarray}
```

対数を外し、指数関数で表現すると、

```
\begin{eqnarray}
 |{mg-kv}|=e^{-kt-kC} \nonumber
\end{eqnarray}
```

```
境界条件として、時刻 $t=0$ のとき、$v=0$ とすると、
\begin{eqnarray}
 |{mg}|=e^{-kC}
\end{eqnarray}

これを代入して積分定数 $C$ を消去すると、
\begin{eqnarray}
 |{mg-kv}|=mg \cdot e^{-kt} \nonumber
\end{eqnarray}

雨粒は次の式で表されるような落下速度で落ちてくる。
\begin{eqnarray}
 v=\frac{mg}{k} \left(1- e^{-kt}\right)
\end{eqnarray}

十分時間がたった（ $t=\infty$ ）とき、
雨粒の速度は $v_{\infty}=\dfrac{mg}{k} $ である。
}

\item{\fbox{練習７}\;

　振り子の長さを $l$、質量を $m$ とする。
また、時刻 $t$ のときの、位置を $x$、鉛直線からの傾きの角度を$\theta$、
速度を $v$ とし、このときの振り子のおもりの運動方程式を作る。
　振り子に働く力は、おもりの重力 $mg$、糸の張力 $T$、水の抵抗力 $kv$ の３力だ。
振り子の振れ角は小さいものとすると、$\theta \approx 0$ であるから、
$\sin \theta \approx \theta$ であり、また、$\theta \approx \dfrac{x}{l}$ である。

以上より、おもりに働く力は
\begin{eqnarray}
 f &=& -mg \sin \theta -kv \cos \theta  \nonumber \\
   &\approx &-mg \cdot \frac{x}{l} - kv
\end{eqnarray}

　これより、おもりの加速度を $a$ とすると、運動方程式を作ると、
\begin{eqnarray}
 ma &=& -mg \sin \theta -kv \cos \theta  \nonumber \\
    &\approx & -mg \cdot \frac{x}{l} - kv
\end{eqnarray}

% --------- 微分方程式の完成 --------
　いつもの様に、速度は位置の時間微分に等しいから　$v=\dfrac{dx}{dt}$、
加速度は速度の時間微分、位置の２次微分に等しいから
$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ であることを用いて
微分方程式を作成すると
\begin{eqnarray}
```

```
 m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &=& -mg \cdot \frac{x}{l}-k \cdot \frac{dx}{dt}
 \label{eq:diffeq2}
\end{eqnarray}
になる。この微分方程式を解けばよいのですが、
通常の変数分離法で計算することは出来ません。
なぜなら、2次微分の項があるからである。

% --------- 微分方程式を解く --------
  この方程式の解を $x=Ae^{\alpha t}\sin (\beta t + \gamma)$ であるとする。
（なぜこのような式にするか？それは経験だよ）
% --------- 数式の形や部分を定義 --------
\newcommand{\AlphaValue}{\alpha}
\newcommand{\BetaValue}{\beta}
\newcommand{\Phase}{\gamma} % 初期位相
\newcommand{\ExpPart}{e^{\AlphaValue \cdot t}} % expornetial part 定義マクロ
\newcommand{\SinPart}{\sin \left( \BetaValue \cdot t + \Phase \right)}
\newcommand{\CosPart}{\cos \left( \BetaValue \cdot t + \Phase \right)}
% -------------------------------------
\begin{eqnarray}
 x &=& A \cdot \ExpPart \SinPart \label{eq:diff_x} \\
 v&=&\frac{d{x}}{dt} = A \cdot \AlphaValue \ExpPart \cdot \SinPart
     +A \cdot \ExpPart \cdot \BetaValue \CosPart \label{eq:diff_v} \\
 a&=&\frac{d^2{x}}{dt^2}=\frac{dv}{dt} \nonumber \\
   &=& A \AlphaValue^2 \ExpPart \cdot \SinPart
       +A \AlphaValue \ExpPart \cdot \BetaValue \CosPart \nonumber \\
   & & +A \AlphaValue \ExpPart \cdot \BetaValue \CosPart
       - A \cdot \ExpPart \cdot \BetaValue^2 \SinPart \nonumber \\
   &=& A(\AlphaValue^2-\BetaValue^2) \ExpPart \cdot \SinPart
       +2A \AlphaValue \BetaValue \cdot \ExpPart \cdot \CosPart
       \label{eq:diff_a}
\end{eqnarray}

  以上の式 (\ref{eq:diff_x})、(\ref{eq:diff_v})、(\ref{eq:diff_a}) を
微分方程式 (\ref{eq:diffeq2}) に代入して、定数 $\alpha$、$\beta$ を求めると
(初期位相 $\gamma$ は初期条件により定まるので、ここでは気にしない)、
\begin{eqnarray}
 \{ m(\AlphaValue^2-\BetaValue^2)+\frac{mg}{l}+k \AlphaValue \}
 A \cdot \ExpPart \cdot \SinPart & & \nonumber \\
 +\{ k \BetaValue +2m \AlphaValue \BetaValue \} A \cdot \ExpPart \cdot
 \CosPart &=& 0 \label{eq:diff_const}
\end{eqnarray}

  式 (\ref{eq:diff_const}) が常に成立するには、次の式が成立する。
\begin{eqnarray}
  m(\AlphaValue^2-\BetaValue^2)+\frac{mg}{l}+k \AlphaValue &=& 0
  \label{eq:diff_const1} \nonumber \\
  k \BetaValue +2m \AlphaValue \BetaValue &=& 0 \label{eq:diff_const2}
```

```
\end{eqnarray}

 式 (\ref{eq:diff_const2}) より、
$ \AlphaValue = -\dfrac{k}{2m}$ %αの値確定
であることが分かる。これを (\ref{eq:diff_const1}) に代入して、
\begin{eqnarray}
 m\left( \frac{k^2}{4m^2}-\BetaValue^2 \right) & & \\
+\frac{mg}{l}-k \frac{k}{2m} &=& 0\\
 \BetaValue = \sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}} % βの値確定
\end{eqnarray}
% ---------------------------------------------------------------------------
\renewcommand{\AlphaValue}{-\frac{k}{2m}} % αの再定義
\renewcommand{\BetaValue}{\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}} % βの再定義
%\newcommand{\ExpPart}{e^{-\frac{k}{2m}\cdot t}} % expornetial part 定義マクロ
%\newcommand{\SinPart}{\sin \left( \BetaValue \cdot t + \Phase \right)}
%\newcommand{\CosPart}{\cos \left( \BetaValue \cdot t + \Phase \right)}
% ---------------------------------------------------------------------------

よって、求める解は、次のようになる。
\begin{eqnarray}
x &=& A \cdot \ExpPart \cdot \SinPart \label{eq:diff_solx}\\
v &=& -\frac{Ak}{2m} \cdot \ExpPart \cdot \SinPart \nonumber \\
  & & +A \BetaValue \cdot \ExpPart \cdot \CosPart \label{eq:diff_solv}
\end{eqnarray}

 手を離したときを $t=0$ とし、
そのときの位置は $x=x_0$ 、
速度は $v=0$ であったとする（これを初期条件という)。
これを式 (\ref{eq:diff_solx})、(\ref{eq:diff_solv}) に代入して、

\begin{eqnarray}
 x_0 &=& A\sin \gamma \label{eq:diff_solx0} \\
  0  &=& -\frac{Ak}{2m}\cdot \sin \gamma
         +A\BetaValue \cdot \cos \gamma \label{eq:diff_solv0} \nonumber
\end{eqnarray}

式 (\ref{eq:diff_solx0}) を (\ref{eq:diff_solv0}) に代入して、

\begin{eqnarray}
 0 &=& -\frac{k}{2m}\cdot A\sin \gamma
       +\BetaValue \cdot A\cos \gamma \nonumber \\
       \tan \gamma &=&\frac{2m}{k}\cdot \BetaValue \label{eq:diff_gamma}
\end{eqnarray}

 式 (\ref{eq:diff_gamma}) を満たす角を $\gamma$ とすればよい。
また、$A=\dfrac{x_0}{\sin \gamma}$ である。
これで微分方程式を満たす関数の形が決定する。
```

```
% ---------------------------------------------------------------------------------
\newcommand{\InitPhase}{\gamma_0} % γからγ0 に
% ---------------------------------------------------------------------------------
\begin{eqnarray}
 \tan \InitPhase=\dfrac{2m}{k} \cdot \BetaValue
\end{eqnarray}

を満たす$\InitPhase$ を用いて
 {
  \renewcommand{\Phase}{\InitPhase} % γからγ0 に
  \begin{eqnarray}
    x=\frac{x_0}{\sin \Phase}\cdot \ExpPart \cdot \SinPart
    \label{eq:diff_solutionx}
  \end{eqnarray}
 }
}
\end{description}
```