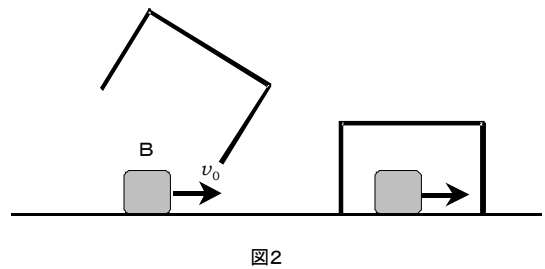


夏期講習 入門編 第五回 総合問題②

〔標準問題〕 1999年度 北海道大学より

問2. 次に、図2に示すように、床の上を運動し続ける物体Bに箱をかぶせる。物体Bは箱の中で左右に衝突を繰り返す。このとき、物体Bと箱の運動について考察しよう。ただし、箱の質量を  $M$ 、箱と物体Bのはねかえり係数を  $e$  とする。また、衝突によって箱が傾くことはないものとする。



衝突前の物体Bおよび箱の速度をそれぞれ  $v_0$  および  $0$  とする。1回目の衝突後の物体Bおよび箱の速度をそれぞれ  $v_1$  および  $V_1$  とする。はねかえり係数  $e$  を  $v_0, v_1, V_1$  で表すと 〔5〕 となる。 $v_1, V_1$  を  $v_0, m, M, e$  で表すと

$v_1 =$  〔6〕、 $V_1 =$  〔7〕となる。

また2回目の衝突後の物体Bおよび箱の速度を、それぞれ  $v_2$  および  $V_2$  とし、はねかえり係数  $e$  を  $v_1, V_1, v_2, V_2$  で表すと 〔8〕 となる。よって、 $e, v_0, v_2, V_2$  の関係は  $e^2 =$  〔9〕 と表される。同様に  $n$  回目の衝突後の物体Bおよび箱の速度を、それぞれ  $v_n$  および  $V_n$  とすると、 $e, v_0, v_n, V_n$  の関係は  $e^n = (-1)^n \times$  〔10〕 となる。したがって、 $e < 1$  であるから、 $n$  が大きくなるにつれて物体と箱の速度の大きさは次第に近づいていくことが分かる。

※ 衝突の計算 → 「運動量保存の法則」と「はねかえり係数の公式」の2つを使って... 同じ繰り返し!

※ 衝突の計算 → 「運動量保存の法則」と「はねかえり係数の公式」の2つを使って、いつものように計算するだけの簡単な問題。文字式の計算なので数学の力の有無が勝負の分かれ目！

## 問2

### 1回目の衝突前後で

はねかえり係数より  $e = -\frac{v_1 - V_1}{v_0} \dots \textcircled{1}$ 、運動量保存の法則より  $mv_0 = mv_1 + MV_1 \dots \textcircled{2}$

(5)は整理すると、 $ev_0 = -v_1 + V_1 \dots \textcircled{5}$  である。①、②2を解いて速度を求めると

物体Bが  $v_1 = \frac{(m - eM)v_0}{m + M} \dots \textcircled{6}$ 、箱が  $V_1 = \frac{(1 + e)mv_0}{m + M} \dots \textcircled{7}$  である。

### 2回目の衝突前後で

はねかえり係数から  $e = -\frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1} \dots \textcircled{8}$ 、運動量保存の法則から  $mv_1 = mv_2 + MV_2$

であるので、(5)(8)より  $e^2 = (-1)^2 \times \frac{v_2 - V_2}{v_0} \dots \textcircled{9}$  になる。

### n回目の衝突前後で

はねかえり係数から  $e^n = (-1)^n \times \frac{v_n - V_n}{v_0} \dots \textcircled{10}$ 、運動量保存の法則から  $mv_0 = mv_n + MV_n$

同様に連立して解くけばよい。

(10)から、 $(-1)^n e^n v_0 = v_n - V_n$  だから、n回目の衝突後の物体Bの速度  $v_n = \frac{m + (-e)^n M}{m + M} v_0$ 、

箱の速度  $V_n = \frac{\{1 - (-e)^n\}m}{m + M} v_0$  である。

はねかえり係数  $e$  が1未満の場合、 $e^n$  はゼロに収束する(【数学】公比が  $-1 < r < 1$  の等比数列の極限值)。

よって、衝突を繰り返すと最終的には物体B、箱ともに  $v_\infty = V_\infty = \frac{m}{m + M} v_0$  の同じ速度に近づ

いてゆくことが分かる。すなわち、合体したときの速度に収束してゆくことになる。