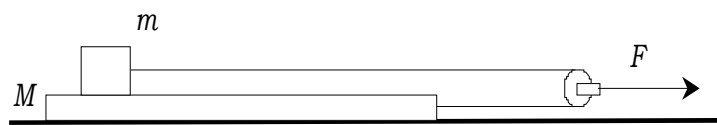


夏期講習 入門編 第五回 力学の総合問題

総合例題 難問に挑戦してみよう!

滑らかな床の上に質量 M [kg] の板が置かれている。その上に質量 m [kg] の物体 (ただし、 $M > m$) を置く。



その物体と板に糸をつけ、軽い滑車を通して右に力 F [N] で引く。以下の問題で必要なら、重力加速度は g [m/s²] とする。

ただし、板と物体の間の静摩擦係数 μ 、動摩擦係数は μ' ($\mu > \mu'$) とする。

※ ヒント： 板と物体の間に働く摩擦力をどのように考えるか？ これに尽きる!

問1 板と物体が一体をなっていて運動する場合の F [N] の条件と、物体の加速度を求めなさい。

問2 物体が板の上を滑る場合の F [N] の条件と、そのときの板と物体の加速度を求めなさい。

※ ヒント： 物体が板の上で静止できる条件とはなんだろうか？

問3 物体が板の上を距離 D [m] 滑る時間を求めなさい。

挑戦資格 → 「運動方程式の鉄則を理解している」、「摩擦力を理解している」の2つだ!

※ ヒント: 板と物体の間に働く摩擦力をどのように考えるか? これに尽きる!

問1 板と物体が一体をなつて運動する場合、摩擦力は静止摩擦力になる。条件は「最大摩擦力を超えない!」である。このときの静止摩擦力を f [N]、物体の加速度 a [m/s²]、糸の張力を T [N] とする。

「運動方程式の鉄則」を使って、それぞれの運動方程式を作ることから始める。

物体が板から受ける摩擦力と、板が物体から受ける摩擦力は「作用・反作用」の関係の力だから互いの向きが逆になる(重要)。とりあえず、物体が板の上を右向きに滑ろうとする(が滑ることはなく静止している)ものとしておくと、物体が受ける静止摩擦力は左向き、板が受ける静止摩擦力は右向きになる。運動方程式を作るための座標を、右向きを正として考える。

物体の運動方程式は $T - f = ma \cdots \textcircled{1}$ 、板の運動方程式は $T + f = Ma \cdots \textcircled{2}$
また、滑車の運動方程式は $F - 2T = 0 \cdots \textcircled{3}$ (滑車の質量はゼロだから)である。

以上の3つの運動方程式を解くと $T = \frac{F}{2}$ 、 $a = \frac{F}{m+M}$ 、 $f = \frac{(M-m)F}{2(M+m)} \cdots \textcircled{4}$ である。

板上を物体が滑らない(一体運動)だから、摩擦力の条件「最大摩擦力を超えない!」が必要。物体に働く静止摩擦力 f は最大摩擦力 μmg を超えないので $f \leq \mu mg \cdots \textcircled{5}$ である。
これで終わり! ①、②、③を使って計算するだけになった!

④を⑤に代入して $\frac{(M-m)F}{2(M+m)} \leq \mu mg$ だから、 $F \leq \frac{2\mu m(M+m)g}{(M-m)}$ である。

よって、物体は板の上を滑らずに一体運動する条件は、滑車を引く力が $\frac{2\mu m(M+m)g}{(M-m)}$

[N] より小さければよい。また、このときの両物体の加速度は $a = \frac{F}{m+M}$ [m/s²] である。

問2 物体が板の上を滑る場合、このときの動摩擦力を f [N]、物体の加速度 a [m/s²]、板の加速度を A [m/s²]、糸の張力を T [N] とする。

※ 物体が板の上を滑るのだから、両者の間に働く摩擦力は「動摩擦力」になる。

物体が板から受ける摩擦力と、板が物体から受ける摩擦力は「作用・反作用」の関係の力だから互いの向きが逆になる(重要)。とりあえず、物体が板の上を右向きに滑る(この場合は実際に滑る)としておくと、物体が受ける動摩擦力は左向き、板が受ける動摩擦力は右向きになる。運動方程式を作るための座標を、右向きを正として考える。

物体の運動方程式は $T - f = ma \cdots \textcircled{1}$ 、板の運動方程式は $T + f = MA \cdots \textcircled{2}$
滑車の運動方程式は $F - 2T = 0 \cdots \textcircled{3}$ 、動摩擦力は $f = \mu' mg$ である。

以上の3つの運動方程式を解くと $T = \frac{F}{2}$ 、 $a = \frac{F - \mu' mg}{2m}$ 、 $A = \frac{F + 2\mu' mg}{2M}$ である。

問1より、滑車を引く力が $\frac{2\mu m(M+m)g}{(M-m)}$ [N] より大きい場合(滑る場合)、物体は板の上を

滑り出し、物体の加速度は $a = \frac{F - 2\mu' mg}{2m}$ 、板の加速度は $A = \frac{F + 2\mu' mg}{2M}$ である。

問3 板から見た物体の加速度は $a_r = a - A$ であるから、 $a_r = \frac{F - 2\mu' mg}{2m} - \frac{F + 2\mu' mg}{2M}$

である。整理して $a_r = \frac{(M-m)F - 2\mu' m(m+M)g}{2Mm}$ となり、等加速度運動の公式に代入し

て $D = \frac{1}{2} \cdot \frac{(M-m)F - 2\mu' m(m+M)g}{2Mm} \cdot t^2$ が得られる。よって、物体が板の上を D [m] 滑

るまでの時間は $t = \sqrt{\frac{4DMm}{(M-m)F - 2\mu' m(m+M)g}}$ である。