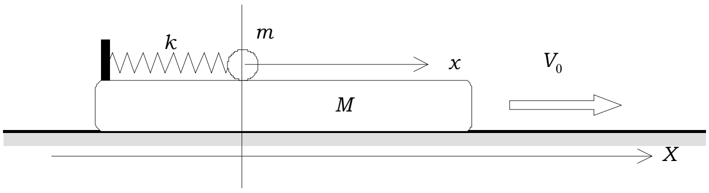
単振動の応用　　　台に取り付けられたばねによる物体の単振動



水平で滑らかな床の上に置かれた質量が M [kg] の直方体の台がある。この台の左端にばね定数 k [N/m] のばねを取り付け、ばねの他端には質量 m [kg] の小さな物体を取り付けた。ばねが自然長になる位置に小物体を置き、台に瞬間的な力を加えたところ、台は右に一定の速度 V_0 [m/s] で動きだした。その後、速度が変わらないように、台を引く力を調節しつづけた。このとき、小物体は台からみて振動運動をしはじめた。このときの小物体の運動について次の問いに答えなさい。ただし、台を動かし始めたときを時刻ゼロとする。

問1　ばねが x [m] 伸びているとき、台から見た小物体の加速度を a [m/s^2] として、小球の運動方程式を作りなさい。

問2　加速度がゼロになるときのばねの伸びを求めなさい。

問3　この小球の振動の周期を求めなさい。

問4　台を等速で動かすために加える適当な力について、どのような力を加えるのか詳しく説明しなさい。

単振動応用　台に取り付けられたばねによる物体の単振動　解答・解説

問1　ばねが x 伸びているのだから、フックの法則（ばねの法則）より、小物体に働く力は、左向きに kx である。また、台は等速（加速度はゼロ）だから、慣性力は考えなくて良い。

よって、小物体の運動方程式は、$ma=-kx$ である。

問2　運動方程式より、$a=0$ のときだから、ばねの伸びは自然長 $x=0$ である。

問3　運動方程式を解いて、加速度は $a=-\dfrac{k}{m}x$ である。また、単振動の公式 $a=-\omega^2 x$ と比較すると、小物体の単振動の角振動数は $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ になることがわかる。よって、台から見た小物体の単振動の周期は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。

問4　最初の時刻（台が動き出した直後）を $t=0$ とする。最初の小物体の位置はばねの自然長 $x=0$ である。力を加えて動かした直後、台から見て小物体は左向きに速さ V_0 で動き出す（床から見た時は、台が右に V_0 で動き、小物体は静止）。

また、単振動の位置の公式 $x=A\sin(\omega t+\delta)$、速度の公式 $v=A\omega\cos(\omega t+\delta)$ より、上の条件（初期条件）を代入すると、$0=A\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\times 0+\delta\right)$、$-V_0=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\times 0+\delta\right)$ の2式が成立する。よって、$\sin\delta=0$、$-V_0=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos\delta$ だから、$\delta=\pi$、$A=V_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。

これを元の式に代入すると、時刻 t ときの小物体の位置（ばねの伸びに相当）は、$x=V_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\left\{\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right)t+\pi\right\}=-V_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right)t$ とかける。

ばねが台に及ぼす力は、$f=kx=-kV_0\sin\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}\cdot t\right)$ になる。

台は等速運動するのだから、台を引く力とばねからの力の合力がゼロになればよい。よって、台を引く力は、$F=-f=kV_0\sin\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}\cdot t\right)$ である。