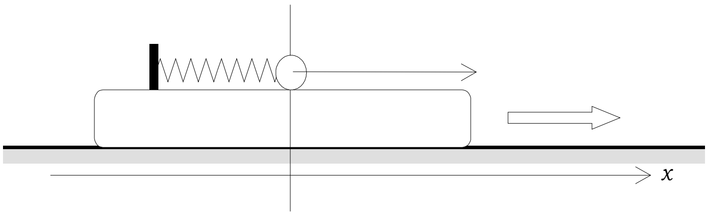
単振動の応用　台に取り付けられたばねによる物体の単振動②



水平で滑らかな床の上に置かれた質量が m_1 [kg] の直方体の台がある。自然長が L [m]、ばね定数 k [N/m] のばねを台の重心より自然長分左にずれた位置に固定し、ばねの右端には質量 m_2 [kg] の小さな物体を取り付けた。ばねが自然長になる位置に小物体を置き、台に瞬間的な力を加えたところ、台は右に速度 V_0 [m/s] で動きだした。その後、力を外から加えないようにした。このとき、小物体、台ともに単振動運動をはじめた。このときの両物体の運動について次の問いに答えなさい。ただし、床から見た台の加速度を a_1 [m/s^2]、台から見た小物体の加速度を a [m/s^2] とし、t [s] のときの、台の左端の位置を x_1 [m]、小物体の位置を x_2 [m] とする。台を動かし始めたときを時刻ゼロとし、そのときの台の位置を $x_1=0$、小物体の位置 $x_2=0$ である。

問1　ばねが x [m] 伸びているとき、床から見た台の運動方程式を作りなさい。

問2　ばねが x [m] 伸びているとき、台から見た小物体の運動方程式を作りなさい。

問3　ばねの伸び x と、台の位置 x_1、小物体の位置 x_2 の関係式を作りなさい。

問4　重心の位置を、m_1、m_2、x_1、x_2 で表しなさい。

問5　重心は等速運動になることを示し、その速度を求めなさい。

問6　重心から見た小物体の振動の周期を求めなさい。

単振動の応用　台に取り付けられたばねによる物体の単振動②

問1　ばねが x [m] 伸びているとき、台の運動方程式を作りなさい。

台に働く力はばねからの力だけだから、台の運動方程式は $m_1 a_1 = kx$ …① である。

問2　ばねが x [m] 伸びているとき、小物体の運動方程式を作りなさい。

台の加速度が a_1 で加速度を持って動くものから見るので、慣性力 $-m_2 a_1$ が働く。

よって、小物体の運動方程式は $m_2 a = -kx - m_2 a_1$ …② である。

問3　ばねの伸び x と台の位置 x_1 、小物体の位置 x_2 の間の関係式を作りなさい。

ばねの伸びは $x = x_2 - x_1$ …③ である。

問4　重心の位置を、m_1 、m_2 、x_1 、x_2 で表しなさい。

重心の公式より、$x_G = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ …④ である。

問5　床から見た小物体の加速度を a_2 とすると、$a = a_2 - a_1$ …⑤ である。

式①、②、③、⑤より、ばねの伸び x 、台から見た小物体の加速度 a を消去する。

台の運動方程式は $m_1 a_1 = k\left(x_2 - x_1\right)$ …①’ であり、

小物体の運動方程式は $m_2 a_2 = -k\left(x_2 - x_1\right)$ …②' である。

重心の加速度は $a_G = \dfrac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2}$ だから、①、②を代入すると、$a_G = 0$ である。

よって、重心の加速度がゼロだから、重心は等速運動することがわかる。

重心の速度の公式は、床から見た台の速度を v_1 、床から見た小物体の速度を v_2 としたとき、

重心の速度は $v_G = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ で一定であるから、$v_G = \dfrac{m_1 V_0}{m_1 + m_2}$ である。

問6　重心は等速運動（加速度がゼロ）だから、重心から見た小物体の運動方程式は床から見た運動方程式と同じになり、$m_2 a_2 = -k\left(x_2 - x_1\right)$ …②' である。これに式④を使って x_1 を消去する。

$-k(m_1 + m_2)x_G = -k m_1 x_1 - k m_2 x_2$ 、$m_1 m_2 a_2 = -k m_1 x_2 + k m_1 x_1$ だから、辺々足し算して整理すると、$-k(m_1 + m_2)x_G + m_1 m_2 a_2 = -k(m_1 + m_2)x_2$ だから、

$a_2 = -\dfrac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\left(x_2 - x_G\right)$ である。よって、小物体は x_G を中心として角振動数が $\omega = \sqrt{\dfrac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$ だから、周期が $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$ の単振動である。