気体の変化　応用　　（　　）組（　　）番　氏名（　　）

達人　次の文章を読んで、下の各問いに答えなさい。

図のように、温度調節器、断熱材で作られた容器と容器の壁に沿って滑らかに動くことの出来るピストンおよび、ばねからなる装置がある。容器の中には単原子分子の理想気体が入っている。外気の圧力はP_0で常に一定である。ばねのばね定数は k で、ピストンの断面積は S、質量は m である。また、気体定数を R、重力加速度を g とする。

図１のように容器を水平に置いたとき、ばねは自然長 l_0 で、気体の入った容器の部分の長さも l_0 で、気体の温度は T_0 であった（状態A）。

ピストンを固定し装置全体を容器の部分を下にして鉛直に置き、温度を調節したところ、ピストンの固定を外して自由にしてもばねは自然長に保った（状態B）。

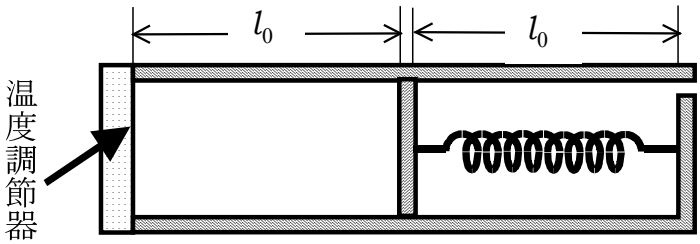


図1

次に、温度を調節し気体の圧力が P_0 になるように調節したところ、ピストンはゆっくりと下がり、図２のようにばねの長さが $\frac{5}{4}l_0$ になった位置で静止した（状態 C）。

次に、ピストンを固定したまま温度を調節し、気体の圧力を状態Bと同じ値まで変化させた。（状態D）

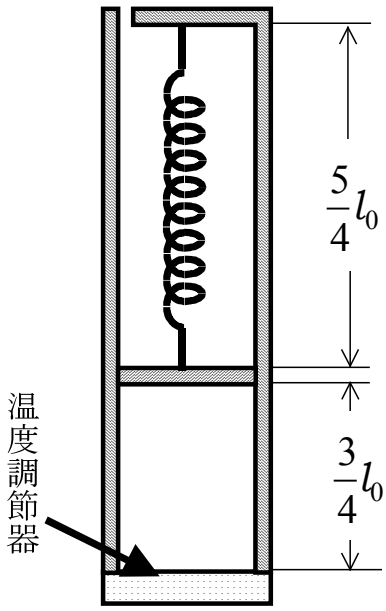


図2

(1)　容器に入ってる気体のモル数を求めなさい。

(2)　ピストンについているばねのばね定数 k を m、g、l_0 を使って表せ。

(3)　状態B、C、Dの温度 T_B、T_C、T_D を求めなさい。

(4)　この気体の変化（状態A→状態B→状態C→状態D）の過程を圧力-体積の図（PV図）に表しなさい。ただし、状態B→状態Cの過程ではPV図上で圧力と体積は直線的関係を維持しながら変化することが分かっている。

(5)　A→B→Cの過程で気体のされた仕事を求めなさい。また、A→B→Cの過程で気体が温度調節器から受け取った熱量を求めなさい。ただし、気体が温度調節器から熱を吸収するときを正とする。

気体の変化　応用（解説）　　（　　）組（　　）番　氏名（　　）

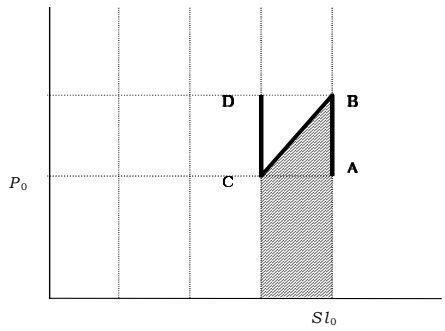
達人　気体の状態方程式、熱力学第一法則、をどこまで理解しているか、容器の外に取り付けられたばねの働きについてどこまで理解できているかが勝負の分かれ目である。

(1) 状態Aの状態方程式は容器の体積が $V = Sl_0$ だから、容器に入っている機体のモル数を n モルとすると、$P_0Sl_0 = nRT_0$ …①)だから、$n = \dfrac{P_0Sl_0}{RT_0}$ である。

(2) ピストンにはたらく力のつりあいから、$P_0S + mg = P_0S + k \cdot \dfrac{l_0}{4}$ より、ばね定数は $k = \dfrac{4mg}{l_0}$ である。

(3) 状態B、C、Dにおける状態方程式はそれぞれ $\left(P_0 + \dfrac{mg}{S}\right)Sl_0 = nRT_B$ …②、$P_0S \cdot \dfrac{3}{4}l_0 = nRT_C$ …③、$\left(P_0 + \dfrac{mg}{S}\right)S\dfrac{3}{4}l_0 = nRT_D$ …④である。よって、$T_B = \dfrac{P_0S + mg}{P_0S}T_0$、$T_C = \dfrac{3}{4}T_0$、$T_D = \dfrac{3(P_0S + mg)}{4P_0S}T_0$

(4) 状態Aは(P_0, Sl_0)、状態Bは$\left(P_0 + \dfrac{mg}{S}, Sl_0\right)$、状態Cは$\left(P_0, \dfrac{3}{4}Sl_0\right)$、状態Dは$\left(P_0 + \dfrac{mg}{S}, \dfrac{3}{4}Sl_0\right)$である。A→Bの過程は体積一定の定積変化だから直線で結ぶ。B→Cの過程は少し複雑だ。この過程での圧力 P と体積 Vの関係を考える。ばねが x伸びたときの気体の体積は $V = S(l_0 - x)$だから、$x = l_0 - \dfrac{V}{S}$ である。また、ピストンに働く力のつりあいより $PS = P_0S + mg - kx$ だから、そのときの気体の圧力 $P = P_0 + \dfrac{mg}{S} - \dfrac{kx}{S}$ である。代入して xを消去すると、$P = P_0 + \dfrac{mg}{S} - \dfrac{k}{S}\left(l_0 - \dfrac{V}{S}\right)$となる。気体の圧力 P と体積 Vの関係式が P、Vについて１次式になっている。したがって、PV 図では直線になることがわかる。C→Dの過程では、体積一定の定積変化であるので直線で結べばよい。



(5) 状態A→Bの過程では体積変化がゼロだから、気体がされる(する)仕事はゼロである。状態B→Cの過程で**「気体がされる仕事は *PV* 図の斜線の面積に相当する」**ので、仕事は斜線部の台形の面積殻も止める。$W = \dfrac{1}{2}\left\{P_0 + \left(P_0 + \dfrac{mg}{S}\right)\right\} \times S \cdot \dfrac{l_0}{4} = \dfrac{1}{4}P_0Sl_0 + \dfrac{1}{8}mgl_0$ である。したがって、状態A→B→Cの過程で気体がされる仕事は $W = \dfrac{1}{4}P_0Sl_0 + \dfrac{1}{8}mgl_0$ である。

また、状態A→B→Cの過程で、内部エネルギーは、気体の温度とモル数のみによるので $\Delta U = \dfrac{3}{2}nR(T_C - T_A) = -\dfrac{3}{8}nRT_0 = -\dfrac{3}{8}P_0Sl_0$ である。気体がされた仕事 W、気体がもらった熱 Q、気体の内部エネルギーの変化 ΔU とすると、熱力学第一法則 $Q + W = \Delta U$ が成立するので、$Q = \Delta U - W = \left(-\dfrac{3}{8}P_0Sl_0\right) - \left(\dfrac{1}{4}P_0Sl_0 + \dfrac{1}{8}mgl_0\right) = -\dfrac{5}{8}P_0Sl_0 - \dfrac{1}{8}mgl_0$ である。

別解　気体がされた仕事の公式は $W = -p\Delta V$ である。これと積分法を用いて計算してみよう。微少体積変化 ΔV のとき気体がされる仕事は $\Delta W = -p\Delta V$ である。したがって、状態Bから状態Cの過程で北がされた仕事は $W = \displaystyle\int_{\text{状態B}}^{\text{状態C}} dW = \int_{V_B}^{V_C} PdV$ である。圧力は $P = P_0 + \dfrac{mg}{S} - \dfrac{kx}{S}$、体積は $V = S(l_0 - x)$ であるので、積分変数を変換して積分を計算すると、$W = \displaystyle\int_{Sl_0}^{\frac{3}{4}Sl_0} PdV = \int_0^{\frac{1}{4}l_0} \left(P_0 + \dfrac{mg}{S} - \dfrac{kx}{S}\right)\left[\dfrac{d(S(l_0 - x))}{dx}\right]dx$ である。

これより、$W = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}l_0} \left(P_0 + \dfrac{mg}{S} - \dfrac{kx}{S}\right)Sdx$ だから、$W = \dfrac{1}{4}P_0Sl_0 + \dfrac{1}{8}mgl_0$ になる。