

導出シリーズ 第2回「運動量保存の法則」

力学の基本はニュートンの「運動の3法則」からすべてが始まる。運動の法則は、次のような部分に分けて説明されている(中学校で学習)。

- ① 慣性の法則 ② 運動の法則 ③ 作用反作用の法則

これらの法則について、ここでは詳しくは述べる暇はないので、未だに理解できていない人はよく復習しておくようにしよう。

今回は、「運動量変化がその間に加えた力積に等しい」をニュートンの運動の法則から導き出した。今回はこれをスタートとして、運動量保存の法則を導いて見せよう。

衝突時に働く力は、「作用反作用の法則」の関係にある！

衝突時に働く力は、互いに相手を押し合う力だけだ。互いに押し合う力は「運動の3法則」の「作用反作用の法則」から、衝突時に働く力は、互いに相手を押し合う力は、「大きさが等しく、向きは反対」向きという関係を持つ。

物体Aは質量が m_A 、速度が v_A 、物体Bは質量が m_B 、速度が v_B としよう。両者が衝突するとき、衝突中に働く力の大きさを簡単にするため、一定の力 F としよう(少し乱暴な仮定だが)。

衝突している時間 t は同じ(当然!)だ。「運動量変化は力積に等しい」から、衝突時に働く力積が運動量の変化になるので、 $m_A v_A' - m_A v_A = F t$ 、 $m_B v_B' - m_B v_B = -F t$ の関係が成立する。

これらより、力 F を消去して、運動量保存の法則を示す $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$ が導かれる。**※ この説明の最大の弱点は、衝突時に働く力が「一定」という仮定の部分にある。**

微積分学的発想で簡単に解消！

この仮定の部分も実は簡単にクリアできる。衝突の間を微小時間間隔で区切り、処理することである。微小時間内では力は一定と考えてなんら問題はない(微積分で使われる常套手段)。

衝突の間を N 等分するとしよう。各区間の時間は $\frac{t}{N}$ であり、それぞれの区間での押し合う力を $F_1, F_2, \dots, F_N$ 、各区間後の速度を $v_{A1}, v_{A2}, \dots, v_{AN}$ とする。各区間それぞれについて計算すると $m_A v_{A1} - m_A v_A = \frac{F_1}{N} t$ 、 $m_A v_{A2} - m_A v_{A1} = \frac{F_2}{N} t$ 、 $m_A v_{A3} - m_A v_{A2} = \frac{F_3}{N} t$ 、
 $\dots$ $m_A v_{AN} - m_A v_{AN-1} = \frac{F_N}{N} t$ となる。物体Aについての結果の式の全ての和を取る。また

$$v_{AN} = v' \text{ だから、 } m_A v_A' - m_A v_A = \left(\frac{F_1 + F_2 + \dots + F_N}{N} \right) t \text{ が導かれる。}$$

この結果は、「衝突中に働く押し合う力が変化するときでも、平均の大きさの力が衝突時間に働いていると考えれば良い」ことを示している。

$$\text{物体Bについても同様にできるので } m_B v_B' - m_B v_B = - \left(\frac{F_1 + F_2 + \dots + F_N}{N} \right) t \text{ となる。よって、}$$

力積の部分を消去して、 $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$ が導かれるので、「弱点(衝突時に力が変化している場合)」は問題とはならないことが証明されたことになる。