

導出シリーズ 第3回 「仕事とエネルギー」

エネルギーの基本は仕事です。定義もこれから始まります。中学校でも学習しますが、力を加えて「その方向に」動かしたとき、下に示す定義になります。

「仕事」 = 「力の大きさ」 × 「その方向に動いた距離」

実際の場合、力を加えても力の方向に動くとは限りませんので、注意が必要な定義といえます。数式で示すと次のようになります。

ベクトルの内積で表示すると $W = \vec{f} \cdot \vec{x}$ 、 **数式で表示すると** $W = f x \cos\theta$

仕事の単位は J (ジュール) で、1 N の力で 1 m 動かす時の仕事と定義される。

状態を変化させるときに使った仕事は、その状態を元に戻すと加えた仕事が戻ってくる場合がある。その一つとして、物体の高さを変える場合がある。

重力による位置エネルギー (gravitational potential energy)

質量 m の物体の高さを h だけ高くするとき、物体には重力 mg が下向きにかかっているの
で物体に上向きに mg の力を加えねばならない。よって、上向きの力 mg で、上向きに h 動かすのだから、必要な仕事 W は mgh である。これを「重力による位置エネルギー」という。

重力による位置エネルギーの基準点(位置エネルギーがゼロの位置)の決め方は、定義で定められていない。適当な位置を設定するため、重力による位置エネルギーの値は相対的なものとなっている。 ※ 万有引力による位置エネルギーの場合、基準点は無限遠方と定められている。

ばねの弾性力による位置エネルギー (elastic potential energy)

ばねに力を加えないとき(自然長の長さになっているとき)、ばねにはエネルギーがない(外に仕事をする事が出来ないから)。よって、基準点はばねが自然長のときと簡単に決まる。

ばね定数 k のばねが x 縮んでいるときに持つエネルギーを求めるには、ばねの自然長から Δx ずつ縮め、その仕事 ΔW ($\Delta W = kx \Delta x$) をばねの伸びが x になるまで積算すれば求めることができる。すなわち、 $W = \sum \Delta W = \sum kx \Delta x$ となり、ばねの弾性力による位置エネルギーとなる。また、積分の形で表すと $W = \int_0^x kx dx$ だから $W = \frac{1}{2} kx_0^2$ である。

※ なお、この計算について、教科書ではグラフを用いて説明がなされています。

運動エネルギー (kinetic energy)

運動エネルギーのゼロは静止しているときと定める。したがって、静止した状態から、仕事を加えて加速させ、その速度までに与えた仕事が運動エネルギーとなる。

静止していた質量 m の物体に力 f を加える。運動方程式は $f = ma$ であるので、加速度は

$a = \frac{f}{m}$ だから、等加速度運動の公式より、物体の速度が v になるまでに動く距離を x とする

と、 $v^2 - 0^2 = 2 \left(\frac{f}{m} \right) x$ が成立する。これを距離を求めると $x = \frac{mv^2}{2f}$ となる。よって、加えた仕事は $W = fx$ だから $W = \frac{1}{2} mv^2$ であるから、運動エネルギーは $K = \frac{1}{2} mv^2$ と表すことができる。