

## 導出シリーズ 第3回 「仕事とエネルギー」

エネルギーの基本は仕事です。定義もこれから始まります。中学校でも学習しますが、力を加えて「その方向に」動かしたとき、下に示す定義になります。

**「仕事」 = 「力の大きさ」 × 「その方向に動いた距離」**

実際の場合、力を加えても力の方向に動くとは限りませんので、注意が必要な定義といえます。数式で示すと次のようになります。

**ベクトルの内積で表示すると**  $W = \vec{f} \cdot \vec{x}$ 、 **数式で表示すると**  $W = f x \cos\theta$

仕事の単位は J (ジュール) で、1 N の力で 1 m 動かす時の仕事と定義される。

状態を変化させるときに使った仕事は、その状態を元に戻すと加えた仕事が戻ってくる場合がある。その一つとして、物体の高さを変える場合がある。

### 重力による位置エネルギー (gravitational potential energy)

質量  $m$  の物体の高さを  $h$  だけ高くするとき、物体には重力  $mg$  が下向きにかかっているの  
で物体に上向きに  $mg$  の力を加えねばならない。よって、上向きの力  $mg$  で、上向きに  $h$  動かすのだから、必要な仕事  $W$  は  $mgh$  である。これを「重力による位置エネルギー」という。

重力による位置エネルギーの基準点(位置エネルギーがゼロの位置)の決め方は、定義で定められていない。適当な位置を設定するため、重力による位置エネルギーの値は相対的なものとなっている。 ※ 万有引力による位置エネルギーの場合、基準点は無限遠方と定められている。

### ばねの弾性力による位置エネルギー (elastic potential energy)

ばねに力を加えないとき(自然長の長さになっているとき)、ばねにはエネルギーがない(外に仕事をする事が出来ないから)。よって、基準点はばねが自然長のときと簡単に決まる。

ばね定数  $k$  のばねが  $x$  縮んでいるときに持つエネルギーを求めるには、ばねの自然長から  $\Delta x$  ずつ縮め、その仕事  $\Delta W$  ( $\Delta W = kx \Delta x$ ) をばねの伸びが  $x$  になるまで積算すれば求めることができる。すなわち、 $W = \sum \Delta W = \sum kx \Delta x$  となり、ばねの弾性力による位置エネルギーとなる。また、積分の形で表すと  $W = \int_0^x kx dx$  だから  $W = \frac{1}{2} kx_0^2$  である。

※ なお、この計算について、教科書ではグラフを用いて説明がなされています。

### 運動エネルギー (kinetic energy)

運動エネルギーのゼロは静止しているときと定める。したがって、静止した状態から、仕事を加えて加速させ、その速度までに与えた仕事が運動エネルギーとなる。

静止していた質量  $m$  の物体に力  $f$  を加える。運動方程式は  $f = ma$  であるので、加速度は

$a = \frac{f}{m}$  だから、等加速度運動の公式より、物体の速度が  $v$  になるまでに動く距離を  $x$  とする

と、 $v^2 - 0^2 = 2 \left( \frac{f}{m} \right) x$  が成立する。これを距離を求めると  $x = \frac{mv^2}{2f}$  となる。よって、加えた仕事は

$W = fx$  だから  $W = \frac{1}{2} mv^2$  であるから、運動エネルギーは  $K = \frac{1}{2} mv^2$  と表すことができる。