

導出シリーズ 第4回 「コンデンサーの電気容量の公式」

コンデンサーの電気容量の定義

コンデンサーは2枚の電極に正・負の電荷を蓄えるパーツである。「コンデンサーの電気容量」は「電気を蓄えやすさを表す物理量」がである。

量的に示すと、「コンデンサーの電気容量」は「電極に加える電圧当たりいくらの電気量を蓄えられるかを表す物理量」である。数式で示すと $C = \frac{Q}{V}$ または、 $Q = C V$ である。これらは、コンデンサーの電気容量の定義に相当するもので導出するものではない。

今回対象とするのはコンデンサーの電気容量の公式の部分である。コンデンサーの電気容量の大きさはコンデンサーの形状、素材により決定されるものだ。

電気力線と電荷の電気量

電気力線という考え方で空間の物理量を考えてみる方法が良く使われる。電気力線は、電荷の電気量により定められている。次のようなものだ。

電荷の電気量 q から出る(入る)電気力線の本数は $N = 4\pi k_0 q$ ($4\pi k_0 = \frac{1}{\epsilon_0}$)である。

これは、電荷の電気量が持つ普遍的な性質である。

電界(電場)と電気力線の関係

「電気力線の向が電界(電場)の向き」、「電気力線の密度が電界(電場)の強さ」

平行板コンデンサーの「公式」 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ (ϵ_0 は真空の誘電率)

「平行板コンデンサー」は、最も構造が簡単なコンデンサーである。互いに向きあう2枚の金属板電極(面積が S)を間隔 d として平行に並べたものである。電極間には、誘電体を入れることも、何も入れないこともあるが、今回は電極間には何も入れないとする。

[導出の道筋]

平行板コンデンサーの正電極に $+Q$ 、負電極に $-Q$ の電荷が蓄えられている。コンデンサーの周りにできる電界は極板間だから、電気力線は極板間のみになる。 $+Q$ から出て、

$-Q$ に入る電気力線の本数は $4\pi k_0 Q$ である。電界の強さは、電気力線の密度(単位面積当たりの本数)に等しいことから、極板間にできる電気力線の密度(単位面積当たりの本数)を求めると、極板の面積が S だから $\frac{4\pi k_0 Q}{S}$ である。電気力線の密度は電界の強さに等しいから

$$E = \frac{4\pi k_0 Q}{S} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad (\text{ただし、} 4\pi k_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \text{) である。}$$

コンデンサーの電圧(極板間電圧)を V とすると、電界は $E = \frac{V}{d}$ と書けるので、 $\frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{V}{d}$ が成立する。コンデンサーの電気容量の定義から、公式 $Q = C V$ を代入して整理すると、コンデンサーの電気容量の公式 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ が導出できる。

なお、極板間に誘電率 ϵ の誘電体を入れた場合、コンデンサーの電気容量は $C = \frac{\epsilon S}{d}$ と変

わる。また、一般に誘電率は $\epsilon > \epsilon_0$ であるので極板間に何も入れないケースはほとんどない。

積層型コンデンサーの公式

実用のコンデンサーでは、単純な平行板コンデンサーをそのまま使っているケースは少ない。そのままではコンデンサーの小型化に支障が生じるため（小型化すると電気容量が小さくなる）、小型化に置いては極板面積の減少につながらない工夫が必須となる。

極板を複数枚重ねることでこれを解決したものが「積層型コンデンサー」である。携帯電話などに使用される超小型コンデンサーはこのタイプである。

積層型コンデンサーの構造は正極板、負極板を交互に複数重ねた改良型平行板コンデンサーともいえる。

面積 S の金属板を n 枚を間隔 d で積み重ねた「積層コンデンサー」の場合について計算しよう。

右図より、向き合う極板間にできる電気力線は $4\pi k q$ より

り、極板間の電界は $E = \frac{4\pi k q}{S} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ である。※ ここまでは平行板コンデンサーと同じだ！

極板間電圧を V とすると $E = \frac{V}{d}$ だから、 $q = \frac{\epsilon_0 S V}{d}$ である。また、正極板、負極板には合計 $\pm(n-1)q$ 電荷が蓄えられているから、積層型コンデンサーの電気量を Q とすると、

$$Q = \frac{\epsilon_0(n-1)SV}{d} \text{ となる。}$$

よって、面積 S の金属板を n 枚を間隔 d で積み重ねた「積層コンデンサー」の電気容量は

$$C = \frac{\epsilon_0(n-1)S}{d} \text{ である。すなわち、積層数 } n \text{ の増加につれて電気容量は増加する。}$$

管型コンデンサーの公式

右図が、内側に、半径が r の正極板（筒）、外側に、半径が R の負極板（筒）で、長さが L の「管型コンデンサー」である。

電荷を Q 蓄えたとき、電気力線は $4\pi k_0 Q$ だから、中心軸から x の位置での電界（電気力線の密度）は

$$E = \frac{4\pi k_0 Q}{2\pi x L} = \frac{2k_0 Q}{xL} \text{ である。電極間の電位差は電界}$$

を距離で積分すれば求めることができる（ $V = Ed$ の関係より $\Delta V = E \Delta x$ だから）。

$$V = \int_r^R \frac{2k_0 Q}{xL} dx \text{ より、積分計算を実行すると } V = \frac{2k_0 Q}{L} (\log_e |R| - \log_e |r|) \text{ より、管型コン}$$

デンサーの電気容量は $C = \frac{L}{2k_0 (\log_e |R| - \log_e |r|)}$ である。※「挑戦編」の新作問題第13回を参照

