導出シリーズ　第６回　「ばねの連結」

フックの法則

「ばねの伸びに加えた力が比例する」はフックの法則です。また、そのときの比例定数を「ばね定数」といいます。変形量が小さい（弾性限界内での変形）場合、この法則が成立します。弾性限界内という条件をうまく拡大したものが「ばね」です。

数式で示すと、加えた力を f、ばねの伸びを x、ばね定数を k とすると、 $f=-kx$ となります（マイナス符号が付いているのは、ばねを伸ばしたときはばねが縮む向きに力が働くことを示すが、力の大きさだけで表すと $f=kx$ となる）。

ばねを複数連結した場合には、ばね定数がどのようになるのでしょうか？　今回はこれを考えることにします。

ばねの連結における「合成ばね定数」　直列接続の場合

ばね定数 k_1 のばね1 と、ばね定数 k_2 のばね2 を直列に連結したばねを考えてみる。連結ばねに力 f を加えたときのばねの伸びを求めてみる。それぞれのばねに働く力は連結ばねと同じ力 f が働くから、ばね1、2において、 $f=k_1x_1$ ・・・①、 $f=k_1x_1$ ・・・② が成立する。

ばねの伸びは、ばね1で $x_1=\dfrac{f}{k_1}$ ・・・③、ばね2 で $x_2=\dfrac{f}{k_2}$ ・・・④ となります。よって、連結ばねの伸びは $x=x_1+x_2$ ・・・⑤ になります。

また、連結ばねのばね定数を k とすると、 $f=kx$ ・・・⑥ となるから、③、④、⑤を⑥に代入して、 $f=k\left(\dfrac{f}{k_1}+\dfrac{f}{k_2}\right)$ が成立する。よって、連結ばね定数の公式 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}$ が導かれたことになる。

「なんだ、コンデンサーの連結（直列コンデンサーの合成容量の公式）と同じじゃないか！」 との声が聞こえそうですが、物理学とはそんなものです。基本公式の形には共通性が多くあるのですね。

ばねの連結における「合成ばね定数」　並列接続の場合

次は、ばねを並列に接続した場合、連結ばねの合成ばね定数を求めてみよう。コンデンサーと同じなら $k=k_1+k_2$ になるのですが、結果はどうなるのでしょうか？

ばね定数 k_1 のばね1 と、ばね定数 k_2 のばね2 を並列に連結したばねを考えてみる。連結ばねを引いて x 伸ばしたとしよう。それぞれのばねにかかる力は $f_1=k_1x$ ・・・①、 $f_2=k_2x$ ・・・② と表すことができ、連結ばねに加えた力は $f=f_1+f_2$ ・・・③ である。また、連結ばねのばね定数を k とすると、 $f=kx$ ・・・④ が成立する。

①、②, ③を④に代入して、 $k_1x+k_2x=kx$ が成立するから、 $k=k_1+k_2$ となり、予想通りの公式が得られた。