導出シリーズ　第7回　「ばねの切断によるばね定数」

フックの法則

「ばねの伸びに加えた力が比例する」はフックの法則です。また、そのときの比例定数を「ばね定数」といいます。変形量が小さい(弾性限界内での変形)場合、この法則が成立します。弾性限界内という条件をうまく拡大したものが「ばね」です。

数式で示すと、加えた力を f 、ばねの伸びを x 、ばね定数を k とすると、 $f=-kx$ となります(マイナス符号が付いているのは、ばねを伸ばしたときはばねが縮む向きに力が働くことを示すが、力の大きさだけで表すと $f=kx$ となる)。

ばねを切断した場合には、ばね定数がどのようになるのでしょうか？　今回はこれを考えることにします。

一様なばねとはどんなばね　「ばねの伸びがどこでも同じ割合で伸びる！」

力を加えた場合のばねの伸びは、一様なばねだから、長さ当たりの伸びがどこでも同じであると考えることができる。したがって、同じ力を加えた場合の切断されたばねの伸びは、切断した長さに比例したものになることが分かる。

切断したばねのばね定数

切断前のばねの長さを L 、バネ定数を k_0 とする。このばねを l ($0<l<L$)だけ切断したとしよう。

全体のばねでは、力 f を加えたとき、ばねの伸びを x_0 とすると $f=k_0 x_0$ ･･･① が成立する。一方、切断したばねでは、同じ力 f を加えたとき、ばねの伸びは $x=x_0\times\frac{l}{L}$ ･･･② となるから、切断したばねのバネ定数 k とすると、 $f=kx$ ･･･③ を満たす。①、②を③に代入して $k_0 x_0=k\left(x_0\times\frac{l}{L}\right)$ が成立する。よって、 $k=k_0\times\frac{L}{l}$ ･･･④ が得られる。

よって、**「切断したばねのばね定数は、切り取った割合 $\frac{l}{L}$ に反比例している」**のだね。

具体的な切り方で示すと、半分に切断したばねのばね定数は、元のばねのばね定数の2倍に、n 分の 1 に切断したばねのばね定数は、元のばねのばね定数の n 倍になるということ。すなわち、短く切ったばねほどばね定数は大きくなるのだね。

$m:n$ に切り分けたときのばね定数

切断したばねのばね定数の公式 $k=k_0\times\frac{L}{l}$ より、$m:n$ に分割したばねのばね定数は、それぞれ $k_m=\frac{k_0(m+n)}{m}$ 、 $k_n=\frac{k_0(m+n)}{n}$ である。もちろん、このばねを直列連結すると、元のばねのばね定数に戻りますね。　**※ 合成ばね定数（直列接続）の公式 $\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ に代入して確かめよ。**