導出シリーズ　第９回　「うなりの振動数」

うなりの振動数は「振動数の差」なんですが…。

振動数がわずかに異なる波を重ね合わせると、振幅がゆっくり変化する波になる。そのため、音波の場合、一定の振動数で音の強弱が変化する。この現象を「うなり」という。

この「うなり」現象は、お寺の鐘の音の「うなり」は、梵鐘の味として親しまれているものであり、野球などでは「スピードガン（球速測定器）」も「うなり」を利用した測定装置でもある。通信機においては周波数変換器としても利用されており、日常生活でもよく利用されている物理現象の一つである。

物理学習においては、公式が余りにも簡単であるため、その原理を十分に理解せずに使われているので、基本原理から導出してみることとしよう。

「波の重ね合わせの原理」から導出する！

波の性質には重要なものが2つある。一つは「波の独立性」、もう一つは「波の重ね合わせの原理」だ。今回使用するのは後者のほうで、その原理とは **「２つの波を重ね合わせた時、２つの波の合成波の変位は、それぞれの波の変位の和に等しい」** というもの。

波の方程式　$y=A\sin(2\pi f t+\delta)$

波を数学的に取り扱うには、波という現象の要素を含んだ数式としなければならない。波の要素として、振幅 A 、波長 λ 、周期 T 、振動数 f 、角振動数 ω 、波の速さ v 、初期位相 δ などいろいろな要素が使われる。次に波の方程式を示してみよう。

① $y=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\delta\right\}$ 、② $y=A\sin\left\{\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\delta\right\}$ 、．．．．

どの要素を使って表すかによって、波の方程式は変幻自在になる。それぞれの要素には相互の関係式 $T=\frac{1}{f}$ 、 $v=f\lambda$ 、 $\omega=2\pi f$ などを使って関数を変形すれば全て同じ式を示しているだけなのだが、数学（三角関数）に弱い人が数式に惑わされて苦手となる主要な原因がここにあるようだ。

うなりの振動数の公式　「振動数の差　$f=|f_1-f_2|$　」

波の方程式 ② $y=A\sin\left\{\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\delta\right\}$ 、 $\omega=2\pi f$ より、原点（ $x=0$ ）とすると、波の方程式は $y=A\sin(2\pi f t+\delta)$ と表すことができる。振幅が同じで、振動数 f_1 、 f_2 の2つの波の場合では、それぞれが $y_1=A\sin(2\pi f_1 t+\delta_1)$ 、 $y_2=A\sin(2\pi f_2 t+\delta_2)$ となる。この波を重ね合わせると、「重ね合わせの原理」より $y=y_1+y_2$ であるから、合成波の方程式は、 $y=A\sin(2\pi f_1 t+\delta_1)+A\sin(2\pi f_2 t+\delta_2)$ である。三角関数の和積変換公式を使って合成すると、 $y=2A\sin\left\{2\pi\frac{f_1+f_2}{2}t+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right\}\cos\left\{2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t+\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right\}$ となる。

振動数はほぼ等しいので $\frac{f_1+f_2}{2}\approx f_1\approx f_2\approx f$ であり、 $\frac{f_1-f_2}{2}\approx F$ は $F\ll f$ である。

したがって、前半部分は元の波とほぼ同じ振動数で変化するが、後半の部分はゆっくりと変化する。そのため、後半部分は振幅の変化として振舞うことになる。

コサイン関数は1周期で2回ゼロになるので、単位時間に $2F$ 回振幅がゼロになる。よって、振幅の変化（うなり）の振動数は f_1-f_2 となるのだ。