

導出シリーズ 第10回 「定常波の節と腹」

同じ波長、振動数で進行方向が重なると？

波の重ね合わせによる現象にはいろいろなものがある。進行方向が逆向きの同じ波が重なると、どちらにも進行しない「定常波(定在波)」という波ができる。まったく動かない位置「節」や、激しく振動する位置「腹」が出来るが、その位置が定まっているため進行しない波となる。教科書などでは、波のグラフを作図して、節、腹の存在を調べる方法をとっている。

波の進行方向と波の方程式

波源1を原点とし、その振動を $y = A \sin 2\pi \cdot \frac{t}{T}$ (振幅 A 、周期 T とする) としよう。波の進行速

度を v とすると、時刻 t における位置 x での波は、伝達時間 $\frac{x}{v}$ だけ遅れて伝わるので、波源を

$t' = t - \frac{x}{v}$ のとき出発した波が伝わったものである。よって、波の変位を表す式は、

$$y_1 = A \sin 2\pi \cdot \frac{t'}{T} \text{ となるので } y_1 = A \sin 2\pi \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right) / T \text{ と表され } y_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right) \text{ で}$$

ある。波長 $\lambda = vT$ を代入して $y_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \dots \textcircled{1}$ とも書くことができる。

波源2が $x = L$ ($L > 0$) の位置にあり、同じ振動をする波源としよう。位置 x ($0 < x < L$)

での波の変位は、距離 $L - x$ 伝わる時間 $\frac{L - x}{v}$ 遅れるので、 $y_2 = A \sin 2\pi \cdot \left(t - \frac{L - x}{v}\right) / T$

だから、 $y_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{L}{\lambda}\right) \dots \textcircled{2}$ である。

【結論】 波の進行方向を表すのは、 $\frac{x}{\lambda}$ の前に付く「符号」によるということが分かる。

逆方向に進む波の重ね合わせ

前述の $y_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \dots \textcircled{1}$ と $y_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{L}{\lambda}\right) \dots \textcircled{2}$ を重ね合わせると、その合成波は $y = y_1 + y_2$ より $y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{L}{\lambda}\right)$ である。三角

関数の和積変換公式を適用して $y = 2A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{2\lambda}\right) \cos 2\pi \left(\frac{L}{2\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right)$ である。

後半部 $\cos 2\pi \left(\frac{L}{2\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right)$ は時刻 t に依存しない。よって、 $\cos 2\pi \left(\frac{L}{2\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0$ となる位置

$\frac{L}{2\lambda} - \frac{x}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)$ (n は整数) では、合成波の変位が常にゼロになり、「節」の位置は

$x = \frac{L}{2} - (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$ (2つの波源の midpoint から左右に4分の1波長の奇数倍毎の位置) である。

また、 $\cos 2\pi \left(\frac{L}{2\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right) = \pm 1$ を満たす位置 $\frac{L}{2\lambda} - \frac{x}{\lambda} = \frac{n}{2}$ (n は整数) では波の振幅が最大に

なり、「腹」の位置は $x = \frac{L}{2} - \frac{n\lambda}{2}$ (2つの波源の midpoint から左右に半波長毎の位置) である。