導出シリーズ　第11回　「原子崩壊の半減期」

原子崩壊のルール　「半減期」

自然界には、いろいろな原子が存在する。ある原子は一定の期間を過ぎる毎にその量が半減するという。この期間を「半減期」と呼んでいる。

原子崩壊の半減期の公式　$N=N_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$　（T は半減期）

この公式はどのようにして導出できるのだろうか。前提条件となるものは何なのか？

この公式を導くために使われる条件は**「全ての原子が同じ確率で壊れる」**というルールである。ここで、原子が単位時間に壊れる確率を p 、時刻ゼロ（ $t=0$ ）のとき、原子の総数が N_0 であるとしよう。

時刻 t のときの原子数が N であったとすると、時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ までの微小時間 Δt に崩壊して減少する原子数は $\Delta N=-pN\Delta t$ になるから $\frac{\Delta N}{\Delta t}=-pN$ である。微小時間 Δt が非常に小さいので $\frac{dN}{dt}=-pN$ ･･･① が成立する（時刻 t のときの原子数は時間の関数 $N=f(t)$ ）。

①の関係式は、微分係数を含んだ関数で「微分方程式」と呼ばれるものである。微分した関数が微分前の元の関数に負の定数 $-p$ を乗じたものに等しいことを示すものである。

このような関数は指数関数と呼ばれ、具体例を示すと $y=Ae^{kx}$ のとき、微分係数 $\frac{dy}{dx}=k\cdot Ae^{kx}$ となる場合と同じだ。

時刻 $t=0$ のとき、原子数は $N=N_0$ であった（これを初期条件という）。よって、時刻 t のときの原子数 N は $N=N_0\cdot e^{-pt}$ という関数で表すことができる。

$e^{-\log_e 2}=\frac{1}{2}$ を使って指数関数の底を変え整理すると、 $N=N_0\cdot e^{-pt}=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{\log_e 2}\cdot t}$ である。

よって、この原子崩壊の半減期は $T=\frac{\log_e 2}{p}$ と表すことができる。

［微分方程式としての一般的な解き方］

微分方程式 $\frac{dN}{dt}=-pN$ は、一般的には**「変数分離法」**という解法が使われる。この微分方程式の変数は N と t である。変数分離とは、右辺と左辺にそれぞれの変数を集めるということ。すなわち、 $\frac{dN}{N}=-p\cdot dt$ と変形することになる。両辺を積分すると、 $\int\frac{dN}{N}=\int -p\cdot dt$ だから、 $\log|N|=-pt+C$ であるから、 $N=\pm e^C\cdot e^{-pt}$ である。初期条件を代入して $N_0=\pm e^C$ だから、 $N=N_0\cdot e^{-pt}$ となる。これ以降は前述の解説と同じであるので省く。