

## 導出シリーズ 第16回 「コンデンサーを流れる電流」

### コンデンサーの公式

コンデンサーの電気容量は、コンデンサーにかかる電圧に対して蓄えられる電気量の比

$C = \frac{Q}{V}$  で定義されている ( $Q = CV$  とも書ける)。これを元に、コンデンサーに電圧を加えたとき

に流れる電流、蓄えられる電気量の時間変化を考察してみる。

### 直流電圧を加えたときのコンデンサーの電気量の変化

コンデンサー(電気容量  $C$ 、抵抗  $R$ 、電源  $V_0$  を、スイッチを挟んで接続する。スイッチを入れる前にはコンデンサーに電荷はたまっていなかったとする。

スイッチを入れてから  $t$  秒後、コンデンサーの電気量を  $Q(t)$  とすると、 $t + \Delta t$  秒までにコンデンサーに流れる電流を考える。そのとき、コンデンサーの電圧は  $V_c = \frac{Q}{C}$  であるから、抵抗の

電圧は  $V = V_0 - V_c = V_0 - \frac{Q}{C}$  になる。オームの法則より、このとき抵抗に流れる電流は

$I_c = \frac{V}{R} = \frac{CV_0 - Q}{CR}$  である。よって、直列につながるコンデンサーに流れ込む電流はそれと等し

いから、コンデンサーの電気量の増加は  $\Delta Q = I_c \Delta t = \left( \frac{CV_0 - Q}{CR} \right) \Delta t$  である。

以上より、コンデンサーに蓄えられる電気量の変化は  $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{CV_0 - Q}{CR}$  となり、 $\Delta t$  をゼロに

近づけて微分形式で表すと  $\frac{dQ}{dt} = \frac{CV_0 - Q}{CR}$  となる。これで、「微分方程式」の形でコンデンサーの電気量を表すことができた。

### 微分方程式を「変数分離法」で解く

変数は電気量  $Q$ 、時間  $t$  の2つだから、「変数分離法」で微分方程式を解くことにしよう。左辺

に  $Q$ 、右辺に  $t$  にまとめ  $\frac{dQ}{CV_0 - Q} = \frac{dt}{CR}$  となる。両辺を積分して  $\int \frac{dQ}{CV_0 - Q} = \int \frac{dt}{CR}$  だか

ら、 $-\log_e |CV_0 - Q| = \frac{t}{CR} + C$  である。指数形に戻すと  $CV_0 - Q = \pm e^{-C} \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$  である。

初期条件は  $t=0$  のとき  $Q=0$  より

$CV_0 - 0 = \pm e^{-C} e^0$  であるから、 $\pm e^{-C} = CV_0$  を代入してコンデンサーの電気量を求めると

$Q(t) = CV_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right)$  である。 $V = \frac{Q}{C}$  より、電圧は

$V(t) = V_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right)$  と表すことができる。

また、コンデンサーに流れる電流は  $I_c = \frac{CV_0 - Q}{CR}$  より、

コンデンサーの電流は  $I(t) = \frac{V_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$  となることが分かる。

