

導出シリーズ 第16回 「コンデンサーを流れる電流」

コンデンサーの公式

コンデンサーの電気容量は、コンデンサーにかかる電圧に対して蓄えられる電気量の比 $C = \frac{Q}{V}$ で定義されている（ $Q = CV$ とも書ける）。これを元に、コンデンサーに電圧を加えたときに流れる電流、蓄えられる電気量の時間変化を考察してみる。

直流電圧を加えたときのコンデンサーの電気量の変化

コンデンサー（電気容量 C 、抵抗 R 、電源 V_0 を、スイッチを挟んで接続する。スイッチを入れる前にはコンデンサーに電荷はたまつていなかったとする。

スイッチを入れてから t 秒後、コンデンサーの電気量を $Q(t)$ とすると、 $t + \Delta t$ 秒までにコンデンサーに流れる電流を考える。そのとき、コンデンサーの電圧は $V_c = \frac{Q}{C}$ であるから、抵抗の電圧は $V = V_0 - V_c = V_0 - \frac{Q}{C}$ になる。オームの法則より、このとき抵抗に流れる電流は

$$I_c = \frac{V}{R} = \frac{CV_0 - Q}{CR} \text{ である。よって、直列につながるコンデンサーに流れ込む電流はそれと等しいから、コンデンサーの電気量の増加は } \Delta Q = I_c \Delta t = \left(\frac{CV_0 - Q}{CR} \right) \Delta t \text{ である。}$$

以上より、コンデンサーに蓄えられる電気量の変化は $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{CV_0 - Q}{CR}$ となり、 Δt をゼロに近づけて微分形式で表すと $\frac{dQ}{dt} = \frac{CV_0 - Q}{CR}$ となる。これで、「微分方程式」の形でコンデンサーの電気量を表すことができた。

微分方程式を「変数分離法」で解く

変数は電気量 Q 、時間 t の2つだから、「変数分離法」で微分方程式を解くことにしよう。左辺に Q 、右辺に t にまとめ $\frac{dQ}{CV_0 - Q} = \frac{dt}{CR}$ となる。両辺を積分して $\int \frac{dQ}{CV_0 - Q} = \int \frac{dt}{CR}$ だから、 $-\log_e |CV_0 - Q| = \frac{t}{CR} + C$ である。指数形に戻すと $CV_0 - Q = \pm e^{-C} \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$ である。

初期条件は $t=0$ のとき $Q=0$ より

$CV_0 - 0 = \pm e^{-C} e^0$ であるから、 $\pm e^{-C} = CV_0$ を代入してコンデンサーの電気量を求める

$$Q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right) \text{ である。 } V = \frac{Q}{C} \text{ より、電圧は}$$

$$V(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right) \text{ と表すことができる。}$$

また、コンデンサーに流れる電流は $I_c = \frac{CV_0 - Q}{CR}$ より、

コンデンサーの電流は $I(t) = \frac{V_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{CR}}$ となることが分かる。

