

導出シリーズ 第17回 「万有引力の法則」

ケプラーの法則

ケプラーの法則は、デンマークのティコ・ブラーエが惑星の運行データを天体観測から集積した。このデータをドイツのケプラーが分析した結果から「惑星運行」のルールが「ケプラーの法則」である。

太陽を周る惑星の動きの観測データから得た「ケプラーの法則」から、その法則がなぜ成立するのかを考察し、「ニュートンの運動の3法則」という理論的な裏づけをしたのが、イギリスのアイザック・ニュートンであった。

ケプラーの法則は3つの小法則に分割されており、第一法則は「**楕円軌道の法則**」と呼ばれるもので、その内容は、「全ての惑星は、太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を動く」というもの。

第二法則は「**面積速度一定の法則**」と呼ばれるもので、その内容は「それぞれの惑星において、太陽と惑星が結ぶ直線が単位時間に通過する面積は一定になる」というもの。

第三法則は「**調和の法則**」と呼ばれるもので、その内容は、「全ての惑星において、惑星楕円軌道の半長軸の3乗と公転周期の2乗の比は等しくなる」というものである。

ニュートンの万有引力の公式 $f = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$

ニュートンの万有引力の法則は、りんごが木から落ちるとき思いついたとの話が有名ですが、りんごの運動を求めて見つけたものではない。ケプラーの法則がなぜ成立するのか、太陽の周りを周るためには力が働いているはず(向心力が必要)だから、その力が、「質量ある物体は互いに引き合う力(万有引力)」があると気付いたのが「りんごが木から落ちる」から発見したとの逸話のもとであったのだ。

ケプラーの法則から万有引力の法則へ

ある惑星についてを考えてみる。質量を m 、公転軌道は円軌道とし半径 r 、周期 T としよう。このときの惑星の周回速度は $v = \frac{2\pi r}{T}$ であり、このときに必要な向心力(万有引力)の大きさは $f = \frac{mv^2}{r}$ より $f = \frac{4\pi^2 m r^2}{r T^2}$ が太陽にその惑星が引かれる力である。

第三法則(調和の法則)より $\frac{r^3}{T^2} = k$ (k は比例定数) が成立するから、惑星が太陽に引かれる万有引力は $f = \frac{4\pi^2 k m}{r^2}$ と表される。よって、太陽が惑星を引く力(万有引力)の大きさは、

「惑星の質量 m に比例し、距離(公転半径)の2乗に反比例している」ことが分かる。

「太陽が惑星を引く力」と「惑星が太陽を引く力」とを考えるとそれは「作用反作用の法則」から同じ大きさになる。また、よって、太陽の質量を含んだものでもあるはずだから、太陽の質量 M と

すると、 $f = \frac{4\pi^2 k' m M}{r^2}$ (ただし、 $k' = \frac{k}{M}$) となり、 $f = G \cdot \frac{m M}{r^2}$ ($G = 4\pi^2 k'$) と表す

ことが出来る。これで、ケプラーの法則から万有引力の法則が導けたことになる。

一般に、質量 m_1 、 m_2 の2物体が距離 r 離れた位置にあるとき、両物体が互いに引きあう力

「万有引力」は $f = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ (G は万有引力定数 $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$) と表すことができる。

これを「**ニュートンの万有引力の法則**」という。