導出シリーズ　第18回　「円運動の向心力の公式」

速度、加速度の定義

物理の学習の最初は、速度、加速度という物理量の定義から始まる。**速度は「単位時間における位置の変化（移動する距離）」**であり、**加速度は「単位時間における速度の変化」**である。すべてベクトル量で扱うので、計算にはベクトル量としての注意が必要だ。

速度、加速度の定義を数式で表す

数式で定義すると、次のようになる。最初、位置が $\vec{x}_0$ 、速度が $\vec{v}_0$ としたとき、わずかな時間 Δt 後に、位置が $\vec{x}_1$ 、速度が $\vec{v}_1$ であったとする。

平均の速度の定義は $v=\dfrac{\vec{x}_1-\vec{x}_0}{\Delta t}$ 、平均の加速度の定義は $a=\dfrac{\vec{v}_1-\vec{v}_0}{\Delta t}$ となる。また、$\Delta \vec{x}=\vec{x}_1-\vec{x}_0$ 、 $\Delta \vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}_0$ としたとき、平均の速度は $v=\dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ 、平均の加速度は $a=\dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ とも表すことができる。

「瞬間の速度」、「瞬間の加速度」とは

また、 Δt をゼロに近づけたときの平均の速度、加速度を「瞬間の速度」、「瞬間の加速度」という。一般に言われる、速度、加速度は「瞬間の速度」、「瞬間の加速度」を意味する。

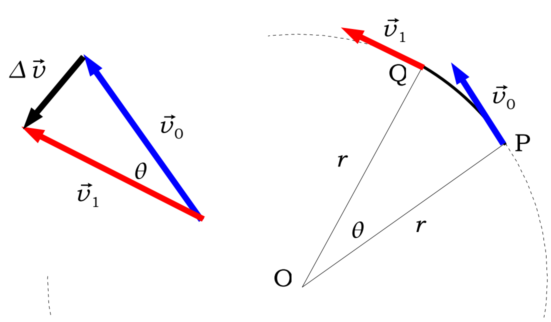
「瞬間の速度」は位置ベクトルの微分係数！「瞬間の加速度」は速度ベクトルの微分係数！

Δt をゼロの極限をとったものを示すと、瞬間の速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}=\dfrac{dx}{dt}$ 、瞬間の加速度 $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{dv}{dt}$ であり、位置を時間で微分すると瞬間の速度になり、速度を時間で微分すると瞬間の加速度になることがわかる。

等速円運動

等速円運動の動きを決める要素は、円運動の半径 r であり、円周上を動く速さを v である（速さ v の変わりに回転する角速度 ω で表す場合もある）。

ここで、等速円運動する物体の質量を m 、半径を r 、速さを v としよう。時間 Δt 経過したとき、速度の変化を見てみよう。



時間 Δt 間の速度は青色ベクトルから赤色ベクトルに変わる。速度の変化は $\Delta \vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}_0$ だから、黒色ベクトルである（右図の左）。

速度ベクトルの変化から加速度ベクトル

二等辺三角形になるので、速度ベクトルの変化は $|\Delta \vec{v}|=2\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}$ である。一方、中心角 θ は時間 Δt 間に回転した角だから、弧の長さは $v\Delta t$ より、弧度法の定義を使って示すと

$\theta=\frac{v\Delta t}{r}$ となる。よって、速度ベクトルの変化の絶対値は $|\Delta\vec{v}|=2v\cdot\sin\frac{v\Delta t}{2r}$ となる。 Δt がゼロに近いので、近似式（xがゼロに近いとき、 $\sin x\approx x$ が成立する）を使って関係式を整理すると $|\Delta\vec{v}|=\frac{v^2\Delta t}{r}$ となる。よって、加速度の定義式 $a=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ より、 $a=\frac{v^2}{r}$ が求まる。なお、速度の変化は Δt が小さいとき、加速度ベクトルの向きは、速度ベクトルに垂直（半径方向）となる。

運動の法則 $f=ma$ より、向心力の大きさは $f=\frac{mv^2}{r}$ で、向きは円運動の中心向きであることがわかった。

微積分法なら簡単に速度、加速度を求めることができる！

円運動の位置ベクトル（中心を原点）は $\vec{x}=(r\cdot\cos\omega t,\ r\cdot\sin\omega t)$ である。位置ベクトルを時間で微分して速度ベクトルに変換して $\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt}=(-r\omega\cdot\sin\omega t,\ r\omega\cdot\cos\omega t)$ と表すことができる。

また、上で求めた速度ベクトルを時間で微分すると加速度ベクトルになることから、加速度ベクトルは $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(-r\omega^2\cdot\cos\omega t,\ -r\omega^2\cdot\sin\omega t)$ 表すことができる。

求めた速度ベクトルを考察する！

位置ベクトルと速度ベクトルの関係を考えてみよう。それぞれのベクトル $\vec{x}$ 、 $\vec{v}$ の内積をとると、 $\vec{x}\cdot\vec{v}=-r^2\omega\cdot\cos\omega t\sin\omega t+r^2\omega\cdot\cos\omega t\sin\omega t=0$ だから、両ベクトルの内積はゼロである。よって、位置ベクトルと速度ベクトルは互いに垂直の関係であることがわかる。

よって、速度ベクトルは半径方向に垂直であることになる。これは当たり前のこと！

求めた加速度ベクトルを考察する！

次に、加速度ベクトルと位置ベクトルの関係を考える。加速度ベクトルと位置ベクトルの間には $\vec{a}=-\omega^2\cdot\vec{x}$ の関係が成立するので、加速度ベクトル $\vec{a}$ と位置ベクトル $\vec{x}$ は互いに逆向きのベクトルである。よって、加速度ベクトルは半径方向で中心向きであることを示している（位置ベクトルは中心から半径方向に外向きである）。

また、加速度ベクトルの絶対値をとると、 $|\vec{a}|=\omega^2\cdot|\vec{x}|$ だから、 $a=r\omega^2$ であり、運動の法則 $f=ma$ を使って向心力を求めると、 $f=mr\omega^2$ と表すことができる。また、角速度 ω は $\omega=\frac{v}{r}$ であるから、向心力の大きさは $f=\frac{mv^2}{r}$ とも書ける。これは、前述の図形を利用して向心力を求めた結果に一致している（当然の結果！）。