導出シリーズ　第19回　「オームの法則を導く」

電流の定義

電流の定義は**「単位時間に流れる電気量」**と定義されている。電流を数式で示すと、時間 Δt の間に流れた電気量が ΔQ であるとき、電流 I は $I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ と表すことができる。 Δt をゼロに近づけて、その極限をとると、電流は $I=\frac{dQ}{dt}$ と表すことができる。

導体のモデル

導体とは電気を通す物質であり、一般に電気を通す代表的な物質は「金属」という物質である。金属には、固有の原子にとらわれず自由に動き回れる「自由電子」が存在する。この自由電子が「キャリア(伝記を運ぶもの)」と呼ばれており、これがとして、電導性を示す理由である。自由電子も電子だから、質量 m_e 、電気量が $-e$ である。

導体となる金属の自由電子密度(単位体積あたりに含まれる自由電子の数)を n とする。この金属で出来た導体は棒状のものとし、断面積が S 、長さが L とする。

導体内の自由電子の運動

導体棒に電圧 V の電池を接続したとき、導体にかかる電圧により導体内には電場 $E=\frac{V}{L}$ が生じ、導体内の自由電子は電場から力 $f=eE=\frac{eV}{L}$ を受ける。自由電子の運動方程式は

$m_e a=\frac{eV}{L}$ だから、加速度 $a=\frac{eV}{m_e L}$ が生じて動き出す。

そのままでは自由電子はどんどん速くなるはずだが、自由電子は金属陽イオンと衝突するので抵抗力が生じてブレーキがかかる。抵抗力は速度に比例するから $f_R=-kv$ と表すことができる。運動方程式は $m_e a=\frac{eV}{L}-kv$ ・・・① と変わる。速度 v がゼロに近いとき(動き出し始め)では、加速度 $a=\frac{eV}{m_e L}$ だが、速度が増すにつれて加速度が減少してゆく。そのため、自由電子の速度は一定の値に収束してゆく。加速度がゼロになる $0=\frac{eV}{L}-kv_\infty$ のときの速度に収束するから、その速度は $v_\infty=\frac{eV}{kL}$ ・・・① である。

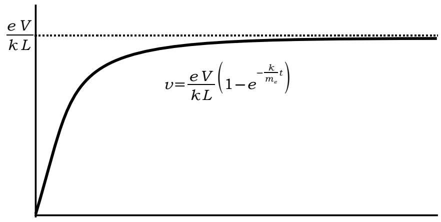
微分方程式として解くと時間経過による速度変化がわかる！

運動方程式 $m_e a=\frac{eV}{L}-kv$ を数学的に解いてみることにしよう。

加速度は速度を時間で微分したものだから、運動方程式は $m_e\frac{dv}{dt}=\frac{eV}{L}-kv$ と変形できる。これは微分方程式と呼ばれるものである。微分方程式を解く方法は色々あるが、そのひとつに変数分離法がある。この微分方程式は変数分離法を使えば解ける。

左辺に v 、右辺に t をまとめると、 $\frac{dv}{eV-kLv}=\frac{1}{m_eL}dt$ となる(この操作を変数分離という)。両辺積分すると $\int\frac{dv}{eV-kLv}=\int\frac{1}{m_eL}dt$ であり、 $-\frac{1}{kL}\log_e|eV-kLv|=\frac{t}{m_eL}+C$ (C は積分定数)となる。この式を指数関数の形に直すと、 $eV-kLv=\pm e^{-\frac{k}{m_e}t-kLC}$ になる。

次に、初期条件を使って積分定数 C を定める。初期条件として、はじめに自由電子は静止していた($t=0$ のとき $v=0$ であった)とするのだから、この値を代入して整理すると $eV=\pm e^{-kLC}$ である。これを代入して、積分定数 C を消去して $eV-kLv=eV\cdot e^{-\frac{k}{m_e}t}$ である。よって、速度の関数は $v=\frac{eV}{kL}\left(1-e^{-\frac{k}{m_e}t}\right)$ になる。グラフに描くと右図のようになり、時間が経過すると一定の速度になることがわかる。



導体を流れる電流

「電流は単位時間に流れる電気量」が電流の定義であるから、これをもとに考えてみよう。

導体棒の断面積 S 、自由電子密度 n 、自由電子の平均速度 v とする。時間 Δt の間に電子が進む距離は $v\Delta t$ であるから、 Δt の間に流れる電子数は体積 $Sv\Delta t$ の中に含まれる電子数である。電子密度が n だから、その電子数は $nSv\Delta t$ 個である。よって、電子1個の電気量の大きさは e であるから、時間 Δt に流れる電気量は $Q=enSv_\infty\Delta t$ である。

前述の電流の定義より、導体に流れる電気量は $I=\frac{Q}{\Delta t}=\frac{enSv_\infty\Delta t}{\Delta t}=enSv_\infty$ となる。前述の自由電子速度 $v_\infty=\frac{eV}{kL}$ を代入して整理すると、導体に流れる電流は $I=\frac{e^2nSV}{kL}$ と表すことが出来る。よって $V=I\cdot\frac{k}{e^2n}\cdot\frac{L}{S}$ の関係式が成立する。

これより、抵抗体に加えた「電圧 V 」は抵抗体に流れる「電流 I 」に比例し、その比例定数は $\frac{k}{e^2n}\cdot\frac{L}{S}$ である。この比例定数を「電気抵抗」と呼ぶことにする。以上をもって、オームの法則 $V=IR$ が証明されたことになる。

比例定数である「電気抵抗」は $R=\frac{k}{e^2n}\cdot\frac{L}{S}$ と表されることが分かった。この電気抵抗は、「抵抗体の素材にのみ依存する部分」と「抵抗体の形状による部分」とに分離できる。これをもとに書き表すと、 $R=\rho\frac{L}{S}$ (ただし、抵抗率 $\rho=\frac{k}{e^2n}$)となる。抵抗率 ρ は抵抗体の素材のみにより定まる部分であり、抵抗体の形状には依存しない。形状に依存するのは $\frac{L}{S}$ の部分だけである。