

導出シリーズ 第22回 「ドップラー効果の公式を導く その3」

ドップラー効果を扱う入試問題はたびたび出題されている 2006 年のセンター試験でも出題されていた。このように重要な物理現象扱われている「ドップラー効果」について深く考察してみよう。基本的には小学校の算数での「旅人算」、「通過算」など解法と同じ「算数の考え方」を使えば解ける単純なのである。よって、それほど理解するのに苦労はないだろう。

ドップラー効果の公式を導く その3

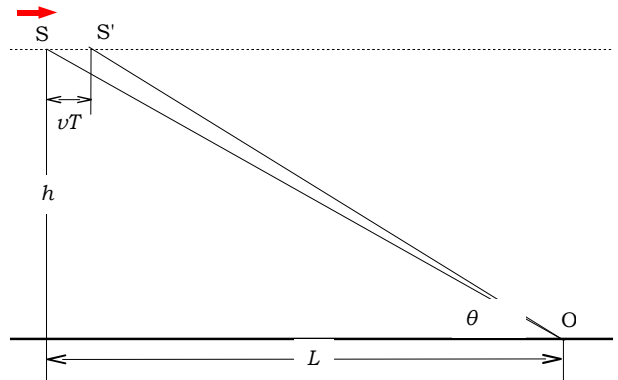
前回まででドップラー効果の基本公式を導出してきた。今回は音源と観測者の方向とは異なる運動方向に動く「変形ドップラー効果(斜めドップラー効果)」について考えてみたい。

飛行機(音源 S)が高さ h を水平方向に、速度 v で飛行しながら音を出す場合

時刻ゼロのとき飛行機が S を速度 v で通過したとする。このとき、音波の山(最大変位)の音波を出したとする。1周期後に次の山を出すときの飛行機の位置を S' とする。

音波の周期を T とすると、SS' の距離は vT になる。

音速を V とすると、S から出た山が地上の観測者に到達する時刻は $t_0 = \frac{\sqrt{h^2 + L^2}}{V}$ になる。次



の山が S' から出る時刻は T であり、S' から O へ到達する時間は $\frac{\sqrt{h^2 + (L - vT)^2}}{V}$ になる。

よって、音波の次の山が O に到達する時刻は、 $t_1 = T + \frac{\sqrt{h^2 + (L - vT)^2}}{V}$ になる。よって、観測

者が受ける音波の周期は $T' = T + \frac{\sqrt{h^2 + (L - vT)^2} - \sqrt{h^2 + L^2}}{V}$ になる。

ここで、音の波長はメートルオーダーであるのに対して、飛行機との距離はキロメートルオーダーであるから $h, L \gg vT$ の関係が成立する。

分子の有理化を行うと $T' = T + \frac{v^2 T^2 - 2LvT}{V\sqrt{h^2 + (L - vT)^2} + \sqrt{h^2 + L^2}}$ となり、 $h, L \gg vT$ を使って

近似すると、 $T' = T - \frac{LvT}{V\sqrt{h^2 + L^2}} = \frac{(V\sqrt{h^2 + L^2} - Lv)T}{V\sqrt{h^2 + L^2}}$ となる。 $T = \frac{1}{f}$ (振動数と周期の公

式)より、 $f' = f \cdot \frac{V\sqrt{h^2 + L^2}}{V\sqrt{h^2 + L^2} - Lv}$ となる。ここで $\cos \theta = \frac{L}{\sqrt{h^2 + L^2}}$ の関係が成立するから、

$$f' = f \cdot \frac{V}{V - v \cos \theta} \text{ となる。}$$

このことから、「**音源の速度のうち、音源 S と観測者 O を結ぶ直線方向の速度成分がドップラー効果を引き起こしている!**」と考えてよい。音源 S と観測者 O を結ぶ直線方向に垂直な速度成分 $v \sin \theta$ はドップラー効果に影響を与えないのだ。

※ 音源 S を固定して、観測者 O が動く場合や、音源 S、観測者 O とともに動く場合についても、前述の方法を使って考えてみよう。