導出シリーズ　第23回　「重心の公式を導く　その1」

重心を求める問題は剛体のつりあい（力のつりあいとモーメントのつりあい）の分野にある。重心の公式として教科書に記載されているものは　$x_G=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$　、　$y_G=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$　であるが、この公式を暗記しいない人もいるだろうか、この公式を暗記しただけで使っている人がほとんどだろう。今回はこの「重心の公式」をモーメントのつりあいから導出することに挑戦してみよう。

重心とは

物体の姿や形考慮しない物理学を「質点の物理学」、物体の大きさを無視しないでする物理学は「剛体の物理学」という。

物体の姿、形を考慮すると、物体は併進運動だけでなく、回転運動も考慮する必要が出てくる。物体が静止するには、**物体が併進運動しない条件として「力がつりあう」**ことと、**物体が回転しない条件として「モーメントがつりあう」**ことの2つが同時に必要になる。

剛体を1点で支えて静止させるためには、上記の2つの条件を満たさなければならない。これを満たす一点を**「剛体の重心」**と呼んでいる。

物体が静止するとは

力のつりあうとき「物体に働く力の和がゼロ」という条件が成立する。力はベクトル量であるので単純な代数和ではないので注意が必要だが、中学校でも学習している馴染みあるものである。

モーメントとは、剛体に加わる回転力に相当する。このモーメントがつりあうことは、回転力の和がゼロになるということだ。

モーメントの定義

モーメントのつりあいを考える上で、剛体の回転の中心を定める。剛体の回転の中心は必ずしも剛体の内部にある必要はなく、どこでも結構。

剛体の回転の中心から加えた力の作用線までの距離を「ウデの長さ」という。**「モーメントの大きさ」は「力の大きさ」×「ウデの長さ」と定義されている。**

モーメントのつりあいを計算する

小さな物体（質量　m_1　の物体1と質量　m_2　の物体2）が長さ　d　の軽い棒で接続されている。座標軸を水平方向 x 軸、鉛直方向 y 軸として、その連結物体を、物体1が　$x_1=a$　、物体2が　$x_2=a+d$　の位置になるように置く。回転の中心を原点 O として、この連結物体を支える力の作用点を　x_G　、加える力を　$f=(f_x,\ f_y)$　として、連結物体に働く力とモーメントを計算し、静止する条件を求めてみよう。

力のつりあいより、　$f_x=0$　、　$f_y=m_1g+m_2g$　である。原点を中心とするモーメントのつりあいより、　$-m_1gx_1-m_2gx_2+f_yx_G=0$　である。よって、　$x_G=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$　であり、この点が重心の座標となる。　$x_1=a$　、　$x_2=a+d$　を代入して、a 、d を使って表すこともできる。

2個以上の物体の集合体の場合

N 個の連結物体（質量が、　$m_1,m_2,\cdots,m_N$　位置が　$x_1,x_2,\cdots,x_N$　）がある。この連結物体を支える力の作用点を　x_G　、加える力を　$f=(f_x,\ f_y)$　とすると、　$f_y=\sum_{n=1}^{N}m_n$　が成立する。

同様に、モーメントのつりあいより　$\sum_{n=1}^{N}m_nx_n-f_yx_G=0$　が成立するから、

重心位置は　$x_G=\dfrac{\sum_{n=1}^{N}m_nx_n}{\sum_{n=1}^{N}m_n}$　と表すことができる。　**※ 2個の場合とまったく同じですね。**