導出シリーズ　第24回　「重心の公式を導く　その２」

重心を求める問題は剛体のつりあい（力のつりあいとモーメントのつりあい）の分野にある。重心の公式として教科書に記載されているものは　$x_G=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$　、　$y_G=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$　であるが、この公式を暗記しいない人もいるだろうか、この公式を暗記しただけで使っている人がほとんどだろう。今回はこの「重心」を積分法を利用して求めてみよう。

重心とは

物体の姿や形考慮しない物理学を「質点の物理学」、物体の大きさを無視しないでする物理学は「剛体の物理学」という。

物体の姿、形を考慮すると、物体は併進運動だけでなく、回転運動も考慮する必要が出てくる。物体が静止するには、**物体が併進運動しない条件として「力がつりあう」**ことと、**物体が回転しない条件として「モーメントがつりあう」**ことの２つが同時に必要になる。

剛体を１点で支えて静止させるためには、上記の２つの条件を満たさなければならない。これを満たす一点を**「剛体の重心」**と呼んでいる。

数列の和から重心の求める

N 個の物体の集積体の重心座標は、

x 座標が　$x_G=\dfrac{\sum_{n=1}^{N} m_n x_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n}$　、　y 座標が　$y_G=\dfrac{\sum_{n=1}^{N} m_n y_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n}$　である。

これを使って底面の半径 r 、高さ h の円錐形の重心を求めてみる。高さ方向に N 等分すると、N 枚の「円盤」に見なせる各部分に分かれ、円錐の頂点から n 枚目の「円盤」の半径は　$\dfrac{rn}{N}$　、厚さは　$\dfrac{h}{N}$　である。密度を　ρ　とすると、n 枚目の「円盤」の質量は　$m_n=\dfrac{\pi\rho r^2 n^2}{N^2}$　である。円錐の頂点を原点として、底面方向を y 軸正とすると、円盤の位置は　$y_n=\dfrac{hn}{N}$　だから、重心座標の公式　$y_G=\dfrac{\sum_{n=1}^{N} m_n y_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n}$　に代入して、　$y_G=\dfrac{\sum_{n=1}^{N}\dfrac{\pi\rho r^2 h}{N^3}n^3}{\sum_{n=1}^{N}\dfrac{\pi\rho r^2}{N^2}n^2}=\dfrac{h\sum_{n=1}^{N} n^2}{N\sum_{n=1}^{N} n^2}$　である。数列の和の公式

$\sum_{n=1}^{N} n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　、　$\sum_{n=1}^{N} n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$　より　$y_G=\lim_{N\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{4}N^2(N+1)^2h}{\dfrac{1}{6}N^2(N+1)(2N+1)}=\dfrac{3}{4}h$　となる。よって、円錐の重心は頂点から　$\dfrac{3}{4}h$　下がったところ（または、底面から　$\dfrac{1}{4}h$　上）になる。

積分法を用いて重心の求める

円錐の頂点を原点とし、鉛直下向きに x 軸正とする。x の位置の dx の円盤を考える。このときの円盤の質量は　$\pi\rho\left(\dfrac{r}{h}x\right)^2\cdot dx$　となるから、重心の公式より、　$x_G=\dfrac{\int_0^h \pi\rho\left(\dfrac{r}{h}x\right)^2\cdot x\cdot dx}{\int_0^h \pi\rho\left(\dfrac{r}{h}x\right)^2\cdot dx}$　となる。

積分を実行して整理すると　$x_G=\dfrac{\int_0^h \pi\rho\left(\dfrac{r}{h}x\right)^2\cdot x\cdot dx}{\int_0^h \pi\rho\left(\dfrac{r}{h}x\right)^2\cdot dx}=\dfrac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx}=\dfrac{3}{4}h$　より、頂点から　$\dfrac{3}{4}h$　下がった（底面から　$\dfrac{1}{4}h$　上がった）位置に重心があることがわかる。　**※ もちろん結論は同じだ！**