

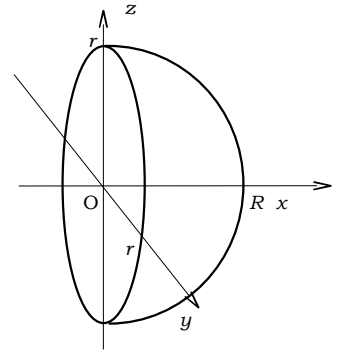
導出シリーズ 第25回 「重心の公式を導く その3」

「半球」の重心を求めるには

球の重心が球の中心にあることは誰でも知っています。しかし、球の半分の重心はどこにあるのかを知っている人はほとんどいないでしょう。これを計算で求めることができる人は少ないでしょう。今回はこの重心について挑戦してみましょ。

前回の「重心の公式を導く その2」で紹介した「数列の和による重心の求め方」や「積分法による重心の求め方」を利用だけです。

最初に、半径 R の半球の中心を原点として、右図のように座標軸を決める。また、半球の密度を ρ とする。



数列の和による方法

x 軸に垂直に半球を N 分割する。厚さが $\frac{R}{N}$ の大きさが異なる円盤が N 個できる。原点から n

番目の円盤の半径は $\sqrt{R^2 - \left(\frac{nR}{N}\right)^2}$ となる。これより、円盤の体積は $V_n = \pi \left\{ R^2 - \left(\frac{nR}{N}\right)^2 \right\}$ 、

質量は $m_n = \pi \rho \left\{ R^2 - \left(\frac{nR}{N}\right)^2 \right\}$ となる。次に、重心座標の x 座標の公式 $x_G = \frac{\sum_{n=1}^N m_n x_n}{\sum_{n=1}^N m_n}$ に

代入して、半球の重心の位置は $x_G = \frac{\sum_{n=1}^N \pi \rho \left\{ R^2 - \left(\frac{nR}{N}\right)^2 \right\} \frac{nR}{N}}{\sum_{n=1}^N \pi \rho \left\{ R^2 - \left(\frac{nR}{N}\right)^2 \right\}}$ である。

分子の部分は $\sum_{n=1}^N \pi \rho \left\{ R^2 - \left(\frac{nR}{N}\right)^2 \right\} \frac{nR}{N} = \frac{\pi \rho R^3}{2N} N(N+1) - \frac{\pi \rho}{4} \left(\frac{R}{N}\right)^3 N^2(N+1)^2$ となり、

分母の部分は $\sum_{n=1}^N \pi \rho \left\{ R^2 - \left(\frac{nR}{N}\right)^2 \right\} = \pi \rho R^2 N - \frac{\pi \rho}{6} \left(\frac{R}{N}\right)^2 N(N+1)(2N+1)$ となる。

以上を重心の公式に戻し、 N を無限大する極限值をとると、 $x_G = \frac{3R}{8}$ となる。

よって、半球の重心の位置は中心から $\frac{3R}{8}$ の位置にあることがわかる。

積分による方法

$x = x$ の位置で、 x 軸に垂直に切断した厚さ dx の円盤を考える。円盤の半径は $\sqrt{R^2 - x^2}$ だから、その円盤の体積は $\pi(R^2 - x^2)dx$ である。その円盤の質量は $\pi \rho(R^2 - x^2)dx$ である。

よって、重心の x 座標は $x_G = \frac{\int_0^R \pi \rho(R^2 - x^2) \cdot x dx}{\int_0^R \pi \rho(R^2 - x^2) dx}$ である。積分を計算すれば終わりだ。

分子の部分は $\int_0^R \pi \rho(R^2 - x^2) \cdot x dx = \pi \rho \left[\frac{1}{2} R^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^R = \frac{\pi \rho R^4}{4}$ であり、分母の部分は

$\int_0^R \pi \rho(R^2 - x^2) dx = \pi \rho \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^R = \frac{2\pi \rho R^3}{3}$ になり、重心位置は $x_G = \frac{3}{8} R$ である。