導出シリーズ　第26回　「弦を伝わる波の速さの公式」

弦楽器の物理的考察

弦楽器の弦を伝わる波が弦の両端で反射することで、弦に定常波が生じる。このとき生じる定常波は弦の長さに依存する。よって、その弦に対応する特定の音が発せられる。

弦の長さが長いほど波長の長い波が定常波となるため、弦が長くなるほど振動数が低い音を発する。また、張力が強いほど波が弦を伝わる速さが速くなるので、振動数が高くなる。

弦を伝わる波の速度 v [m/s] は、弦の線密度 σ [kg/m] と弦の張力 S [N] により定まり、教科書にもあるように、波の速度を表す公式は $v=\sqrt{\dfrac{S}{\sigma}}$ である。今回はこの公式 $v=\sqrt{\dfrac{S}{\sigma}}$ を導出して見ることにしよう。

次元とは

力学全般において「基本となる次元」は次の3つである。長さの次元 L 、質量の次元 M 、時間の次元 T とする。この3つの次元を使えば、すべて物理量の次元をこの組み合わせで表すことができるのだ。

速さは「距離÷時間」だから、$\mathrm{L\,T^{-1}}$ 、加速度は「速さ÷時間」だから、$\mathrm{L\,T^{-2}}$ 、力は「質量×加速度」だから $\mathrm{M\,L\,T^{-2}}$ 、仕事（エネルギー）は「力×距離」だから、$\mathrm{M\,L^{2}\,T^{-2}}$ である。圧力は「単位面積あたりの力」だから、圧力の次元は $\mathrm{M\,L^{-1}\,T^{-2}}$ になる。物理量すべてを挙げてゆくと限がない位にあるのでこれくらいにしておこう。

次元解析法

「次元解析法」とは、物理量の次元を考えることで、公式の形を求める方法である。物理量の間の関係を使って関係式の形を考える「次元解析法」でいろいろな公式を簡単に決めることができるのだ。

弦を伝わる波の速さの公式を導くには、速さがどのような物理量に依存しているかを考えればよい。**「弦を伝わる波の速度は弦の線密度と弦の張力により決まる」**から、必要な次元は、「速度」、「線密度」、「張力」の3つである。

それぞれの物理量の次元を考えると、「速度」の次元は $\mathrm{L\,T^{-1}}$ であり、「単位長さあたりの質量が線密度」だから、「線密度」の次元は $\mathrm{M\,L^{-1}}$ である。また、張力は力であるから、「張力」の次元は $\mathrm{M\,L\,T^{-2}}$ である。

以上を元に弦を伝わる波の速度の公式を次元解析法で考えてみよう。弦を伝わる波の速さの公式を $v=\sigma^{\alpha}S^{\beta}$ であるとする。α、β は未知数とする。

次元解析を行うと、 $\mathrm{LT^{-1}} = (\mathrm{M\,L^{-1}})^{\alpha}\cdot(\mathrm{M\,L\,T^{-2}})^{\beta}$ になるので $\mathrm{LT^{-1}} = \mathrm{M^{\alpha}\,L^{-\alpha}\cdot M^{\beta}\,L^{\beta}\,T^{-2\beta}}$ である。よって、両辺の次元が一致するのだから $0=\alpha+\beta$ 、 $1=\beta-\alpha$ 、 $-1=-2\beta$ が成立しなければならない。よって、 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 、 $\beta=\dfrac{1}{2}$ である。以上より、弦を伝わる波の速さの公式は $v=\sigma^{\alpha}S^{\beta}=\sqrt{\dfrac{S}{\sigma}}$ と表すことができる。

※ この次元解析による方法は、物理量の間の関係までが分かるが、関係式の係数を決めることが出来ないのが残念なところだ。

ニュートン力学による本格的な解法

図１のように、弦を力 F で引っ張り、更に一端で衝撃的な上下運動を加えると、パルス(弦の小さな山)が x 軸正方向に速さ v で伝わってゆく。この弦の静止時の質量線密度(単位長さ当たりの質量)は ρ とする。

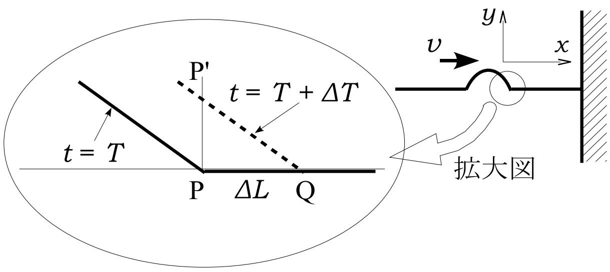

図１

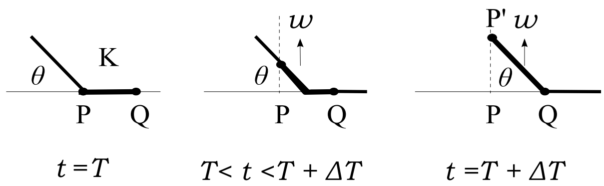

図2

パルスの右端は角度 θ で立ち上がるとする(図３の拡大図)。時刻 T から $T+\Delta T$ の間に、立ち上がりの位置は速さ v でＰからＱに移動する。同様に、Ｋは y 軸方向にも動く。この速度を w とすると、図３より $w=v\tan\theta$ である。

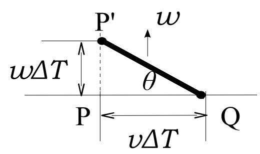

図3

時刻 T に位置ＰとＱの間にあった弦の小部分をＫと呼ぶ。Ｋの左端は時刻 T に y 軸正の方向に動き始める。図２に示すように、その後、Ｋの各点は左から順に y 軸正方向に動き始め、時刻 $T+\Delta T$ の間に、立ち上がりの位置は速さ v で時刻 $T+\Delta T$ には、Ｋの右端(Ｑ)が動き始める。

PQ の長さが $v\Delta T$ であるので、その弦の部分の質量は $\rho v\Delta T$ である。また、$t=T+\Delta T$ のときのＫの運動量は、上向きに $p=\rho v\Delta T\times w=\rho vw\Delta T$ である。

この間、Ｋの部分を引く力(張力)は F とすると、力の y 方向成分は $F\sin\theta$ (x 方向成分は $-F\cos\theta$)である。また、 ΔT 間にＫが受ける力積の y 軸方向成分は $F\sin\theta\cdot\Delta T$ になる。

「運動量の変化は力積に等しい」ことから $\rho vw\Delta T=F\sin\theta\cdot\Delta T$ が成立するので、これを整理すると $\rho vw=F\sin\theta$ になる。また、 $w=v\tan\theta$ の関係が成立するので、これを使って w を消去すると $\rho v^2\tan\theta=F\sin\theta$ と表すことができる。

以上より、弦の上を波が進む速さは $v=\sqrt{\dfrac{F\cos\theta}{\rho}}$ と書ける。このとき、弦の振動において、(弦の振動の変位は小さいから) θ は十分に小さい。よって $\cos\theta=1$ として良い。

以上より、弦を伝わる波の速さは $v=\sqrt{\dfrac{F}{\rho}}$ と表すことができる。

※ なお、今回扱った導出課程は、大阪大学の入試問題として過去に出題されている。